

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w czwartek 7.01.2021 i wtorek 12.01.2021.**

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

504. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - 3 \cdot |x + 1|$$

na przedziale $[-2, 2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

505. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - 6|$$

na przedziale $[-4, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

506. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x + |x^2 - x - 6|$$

na przedziale $[-5, 5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

507. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = x^2 - \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$$

na przedziale $[-3, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

508. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{9x^2 + 6x + 1} - x^2$$

na przedziale $[-2, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

509. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = 3x + |x^3 - 9x|$$

na przedziale $[-4, \sqrt{10}]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

510. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^4 - 98x^2 + 7^4}$$

na przedziale $[-11, 9]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

511. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{x}{99} - \frac{10 \cdot \ln(x^2 + 1)}{99} + \operatorname{arctg} x$$

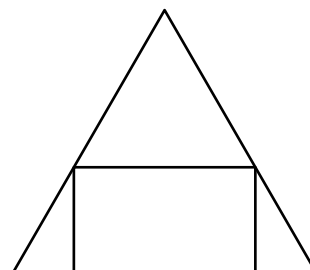
osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9, 11]$.

512. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

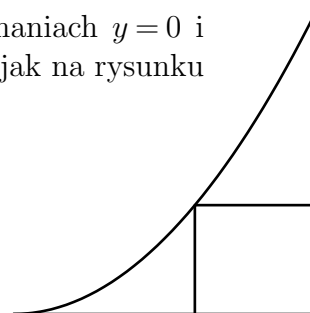
$$f(x) = \frac{9}{x} - \frac{81}{8x^2} + \ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[4, 5]$.

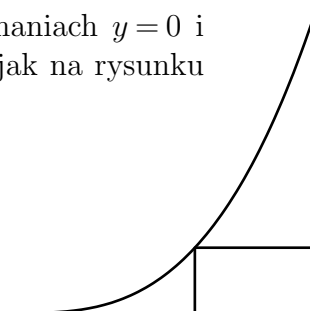
513. W stożku o objętości 1 chcemy umieścić walec w taki sposób, że jedna z podstaw walca leży w płaszczyźnie podstawy stożka, a obwód drugiej podstawy walca leży na powierzchni bocznej stożka. Rysunek obok przedstawia widok z boku, ewentualnie przekrój płaszczyzną zawierającą wspólną oś obrotu stożka i walca. Jaką największą objętość może mieć walec?



514. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y = 0$ i $x = 1$ oraz parabolą o równaniu $y = x^2$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



515. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y = 0$ i $x = 1$ oraz krzywą o równaniu $y = x^3$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



516. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 12}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{C},$$

gdzie $C = 6$ (**wersja trudniejsza**) lub $C = 3$ (**wersja łatwiejsza**).

517. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (2, 4)$ zachodzi nierówność $\sqrt[x]{x} > \sqrt{2}$.

518. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x) = 5 \sin x - \sin 5x.$$

519. Niech $f(x) = 4 \cos x + \sin 4x$. Podać wszystkie miejsca zerowe pochodnej funkcji f w przedziale $[0, 2\pi)$.

520. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$16 \cdot \operatorname{arctg} 7 + \ln 13 \quad \text{czy} \quad 16 \cdot \operatorname{arctg} 8 + \ln 10 ?$$

Wskazówka 1: Podane liczby są większe od 25, a różnią się o mniej niż 0,02 — nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Wskazówka 2: Zbadaj funkcję pomocniczą $f(x) = 16 \operatorname{arctg} x - \ln(x^2 + 1)$.

W każdym z 10 poniższych zadań podaj największą wartość funkcji f na przedziale $[0, \infty)$. Odpowiedzi podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

521. $f(x) = \sqrt{x} - 2x^2$

522. $f(x) = 4\sqrt{x} - x^2$

523. $f(x) = 32\sqrt{x} - x^2$

524. $f(x) = 4\sqrt{x} - 27x^2$

525. $f(x) = 32\sqrt{x} - 27x^2$

526. $f(x) = 4\sqrt{x} - 125x^2$

527. $f(x) = 6\sqrt{x} - x^3$

528. $f(x) = 3\sqrt{x} - 16x^3$

529. $f(x) = 8\sqrt{x} - x^4$

530. $f(x) = \sqrt{x} - 16x^4$