484. Udowodnić nierówności
$$\frac{1}{1301}<\operatorname{arctg}51-\operatorname{arctg}49<\frac{1}{1201}\,.$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x)=\operatorname{arctg}x$ na przedziale $[49,\,51]$ wynika istnienie takiej liczby $c\in(49,\,51)$, że
$$\operatorname{arctg}51-\operatorname{arctg}49=(51-49)\cdot f'(c)=2\cdot f'(c)\,.$$
Ponieważ
$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\,,$$
z nierówności $49<c<51$ otrzymujemy
$$\frac{1}{1301}=\frac{2}{2602}=\frac{2}{51^2+1}\quad<\quad\operatorname{arctg}51-\operatorname{arctg}49=\frac{2}{c^2+1}\quad<\quad\frac{2}{49^2+1}=\frac{2}{2402}=\frac{1}{1201}\,,$$
co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

485. Udowodnić nierówności
$$\frac{1}{9}<\ln 9-\ln 8<\frac{1}{8}\,.$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x)=\ln x$ na przedziale $[8,\,9]$ wynika istnienie takiej liczby $c\in(8,\,9)$, że
$$\ln 9-\ln 8=f'(c)\,.$$
Ponieważ
$$f'(x)=\frac{1}{x}\,,$$
z nierówności $8<c<9$ otrzymujemy
$$\frac{1}{9}\quad<\quad\ln 9-\ln 8=f'(c)=\frac{1}{c}\quad<\quad\frac{1}{8}\,,$$
co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

486. Udowodnić nierówności
$$\frac{1}{34}<\operatorname{arctg}13-\operatorname{arctg}8<\frac{1}{13}\,.$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x)=\operatorname{arctg}x$ na przedziale $[8,\,13]$ wynika istnienie takiej liczby $c\in(8,\,13)$, że
$$\operatorname{arctg}13-\operatorname{arctg}8=(13-8)\cdot f'(c)=5\cdot f'(c)\,.$$
Ponieważ
$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\,,$$
z nierówności $8<c<13$ otrzymujemy
$$\frac{1}{34}=\frac{5}{170}=\frac{5}{13^2+1}\quad<\quad\operatorname{arctg}13-\operatorname{arctg}8=\frac{5}{c^2+1}\quad<\quad\frac{5}{8^2+1}=\frac{5}{65}=\frac{1}{13}\,,$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

487. Udowodnić nierówność

$$\operatorname{arctg} 6+\operatorname{arctg} 12<\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg} 10\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (oficjalny):

Podana nierówność może być przepisana w postaci

$$\operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 10<\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 6\,.$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x)=\operatorname{arctg} x$ na przedziałach $[6,7]$ oraz $[10,12]$ wynika istnienie takich liczb $c\in(6,7)$ oraz $d\in(10,12)$, że

$$\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 6=f'(c)\,.$$

oraz

$$\operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 10=2\cdot f'(d)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $6<c<7$ oraz $10<d<12$ otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{1}{50} \quad < \quad \operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 6=f'(c)=\frac{1}{c^2+1} \quad < \quad \frac{1}{37}$$

oraz

$$\frac{2}{145} \quad < \quad \operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 10=2\cdot f'(d)=\frac{2}{d^2+1} \quad < \quad \frac{2}{101}\,.$$

W konsekwencji

$$\operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 10<\frac{2}{101}<\frac{2}{100}=\frac{1}{50}<\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 6\,,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

Sposób II (rachunkowy):

Niech

$$f(x)=\operatorname{arctg}(6+x)+\operatorname{arctg}(12-2x)$$

będzie funkcją, która dla $x=0$ i $x=1$ przyjmuje wartości równe odpowiednio lewej i prawej stronie dowodzonej nierówności. Zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykażemy, że funkcja f jest rosnąca na przedziale $(0,1)$, a do tego wystarczy wykazać dodatniość jej pochodnej na tym przedziale. Miłośnicy rachunków bez trudu stwierdzą, że

$$f'(x)=\frac{1}{(6+x)^2+1}+\frac{-2}{(12-2x)^2+1}=\frac{2x^2-72x+71}{((6+x)^2+1)\cdot((12-2x)^2+1)}=$$

$$=\frac{2x^2-4x-68x+2+68+1}{((6+x)^2+1)\cdot((12-2x)^2+1)}=\frac{2\cdot(x-1)^2+68\cdot(1-x)+1}{((6+x)^2+1)\cdot((12-2x)^2+1)}\,,$$

co wobec dodatniości ostatniego wyrażenia dla $x\leqslant 1$ kończy rozwiązanie zadania.

Sposób III (wymaga znajomości pewnej sztuczki):

Skorzystamy z tego, że $\operatorname{arctg} x$ jest argumentem liczby zespolonej $1+ix$ oraz z faktu, że przy mnożeniu liczb zespolonych ich argumenty się dodają.

Wobec tego $\operatorname{arctg} 6+\operatorname{arctg} 12$ jest argumentem liczby

$$(1+6i)\cdot(1+12i)=1+18i-72=-71+18i=71\cdot\left(-1+\frac{18}{71}\cdot i\right),$$

natomiast $\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg} 10$ jest argumentem liczby

$$(1+7i)\cdot(1+10i)=1+17i-70=-69+17i=69\cdot\left(-1+\frac{17}{69}\cdot i\right).$$

Zatem lewa i prawa strona dowodzonej nierówności są równe odpowiednio argumentom liczb

$$-1+\frac{18}{71}\cdot i \qquad \text{oraz} \qquad -1+\frac{17}{69}\cdot i\,.$$

Wobec tego dowodzona nierówność jest równoważna nierówności

$$\frac{18}{71}>\frac{17}{69}\,,$$

którą możemy wykazać następująco:

$$\frac{18}{71}>\frac{18}{72}=\frac{1}{4}=\frac{17}{68}>\frac{17}{69}\,.$$

Uwagi: Ponieważ argumentem liczby zespolonej $-1+\frac{1}{4}\cdot i=-\left(1-\frac{1}{4}\cdot i\right)$ jest liczba

$$\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} 4\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} 4\,,$$

faktycznie udowodniliśmy nierówności

$$\operatorname{arctg} 6+\operatorname{arctg} 12<\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} 4<\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg} 10\,.$$

Zwróćmy też uwagę, że postępując podobnie jak powyżej, strony dowodzonej nierówności można zapisać jako:

$$\operatorname{arctg} 6+\operatorname{arctg} 12=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{71}{18}\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(4-\frac{1}{18}\right)$$

oraz

$$\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg} 10=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{69}{17}\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(4+\frac{1}{17}\right).$$

Metodami podobnymi do powyższych można udowodnić nierówności równoważne danej w zadaniu nierówności:

$$\operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 10=\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{121}\right)<\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{86}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{43}\right)=\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 6\,,$$

$$\operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 7=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{17}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{68}\right)<\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{61}\right)=\operatorname{arctg} 10-\operatorname{arctg} 6$$

oraz

$$\operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 10-\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg} 6=\operatorname{arctg}\left(\frac{7}{1041}\right)>0\,.$$

488. Udowodnić nierówność

$$26\cdot e^{\mathrm{arctg}\,5}<25\cdot e^{\mathrm{arctg}\,7}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowowdzona nierówność po obustronnym zlogarytmowaniu przy podstawie e przyjmuje postać

$$\ln 26+\mathrm{arctg}\,5<\ln 25+\mathrm{arctg}\,7\,,$$

co można przepisać jako

$$\ln 26-\ln 25<\mathrm{arctg}\,7-\mathrm{arctg}\,5\,.$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x)=\ln x$ na przedziale $[25, 26]$ wynika istnienie takiej liczby $c\in(25, 26)$, że

$$\ln 26-\ln 25=(26-25)\cdot f'(c)=f'(c)\,.$$

Ponadto z twierdzenia Lagrange'a zastosowanego do funkcji $g(x)=\mathrm{arctg}\,x$ na przedziale $[5, 7]$ wynika istnienie takiej liczby $d\in(5, 7)$, że

$$\mathrm{arctg}\,7-\mathrm{arctg}\,5=(7-5)\cdot g'(d)=2\cdot g'(d)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

oraz

$$g'(x)=\frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $25<c<26$ oraz $5<d<7$ otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{1}{26}\quad<\quad\ln 26-\ln 25=f'(c)=\frac{1}{c}\quad<\quad\frac{1}{25}$$

oraz

$$\frac{1}{25}=\frac{2}{50}\quad<\quad\mathrm{arctg}\,7-\mathrm{arctg}\,5=2\cdot g'(d)=\frac{2}{d^2+1}\quad<\quad\frac{2}{26}=\frac{1}{13}\,.$$

W konsekwencji

$$\ln 26-\ln 25<\frac{1}{25}<\mathrm{arctg}\,7-\mathrm{arctg}\,5\,,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

489. Dana jest funkcja $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt[\pi]{x^\pi+\pi}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|\,,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leqslant 1\,.$$

Bezpośrednie wyliczenia prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{\pi}(x^\pi+\pi)^{1/\pi-1}\cdot \pi x^{\pi-1}\right| = \frac{x^{\pi-1}}{(x^\pi+\pi)^{1-1/\pi}} = \frac{x^{\pi-1}}{(x^\pi+\pi)^{(\pi-1)/\pi}} = \frac{(x^\pi)^{(\pi-1)/\pi}}{(x^\pi+\pi)^{(\pi-1)/\pi}} =$$

$$= \left(\frac{x^\pi}{x^\pi+\pi}\right)^{(\pi-1)/\pi} < 1\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

490. Dana jest funkcja $f:[-10,\,10]\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{10x^2+9000}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[-10,\,10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|\ .$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)| = |f'(c)|\cdot|x-y|\ ,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x\in[-10,\,10]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leqslant 1\,.$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x|\leqslant 10$ prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left|\frac{10x}{\sqrt{10x^2+9000}}\right| = \frac{10\cdot|x|}{\sqrt{10x^2+9000}} = \frac{10}{\sqrt{10+\frac{9000}{x^2}}} \leqslant \frac{10}{\sqrt{10+\frac{9000}{10^2}}} = \frac{10}{\sqrt{10+90}} = \frac{10}{10} = 1\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

491. Dana jest funkcja $f:[-10,\,10]\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{5x^2+125}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[-10,\,10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant 2\cdot|x-y|\ .$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)| = |f'(c)|\cdot|x-y|\ ,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x\in[-10,\,10]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leqslant 2\,.$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x| \leqslant 10$ prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left|\frac{5x}{\sqrt{5x^2+125}}\right| = \frac{5\cdot|x|}{\sqrt{5x^2+125}} = \frac{5}{\sqrt{5+\frac{125}{x^2}}} \leqslant \frac{5}{\sqrt{5+\frac{125}{10^2}}} = \frac{5}{\sqrt{6,25}} = \frac{5}{2,5} = 2\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

492. Dana jest funkcja $f:[-1,\,1]\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{2x^2+2}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[-1,\,1]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\;.$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|\;,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x\in[-1,\,1]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)|\leqslant 1\,.$$

Dla $x=0$ powyższa nierówność jest oczywista wobec $f'(0)=0$, a dla $x\neq 0$ bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x|\leqslant 1$ prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left|\frac{2x}{\sqrt{2x^2+2}}\right| = \frac{2\cdot|x|}{\sqrt{2x^2+2}} = \frac{2}{\sqrt{2+\frac{2}{x^2}}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{2+\frac{2}{1^2}}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

493. Dana jest funkcja $f:[-4,\,4]\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{x^2+9}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[-4,\,4]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{4}{5}\cdot|x-y|\;.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Należy udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[-4,\,4]$ zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt{x^2+9}-\sqrt{y^2+9}\right|\leqslant\frac{4}{5}\cdot|x-y|\;.$$

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\left|\sqrt{x^2+9}-\sqrt{y^2+9}\right| = \left|\sqrt{x^2+9}-\sqrt{y^2+9}\right|\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}} =$$

$$= \frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}} = |x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}\,.$$

Dowód danej w treści zadania nierówności będzie zakończony, jeśli wykażemy nierówność

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}} \leqslant \frac{4}{5}\,,$$

która jest równoważna nierówności

$$|x+y| \leqslant \frac{4}{5} \cdot \left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}\right)\,.$$

Powyższą nierówność dowodzimy korzystając z nierówności trójkąta, wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ oraz uwzględniając nierówności $x^2 \leqslant 16$ i $y^2 \leqslant 16$:

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| = \sqrt{x^2}+\sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{9x^2}{25}+\frac{16x^2}{25}}+\sqrt{\frac{9y^2}{25}+\frac{16y^2}{25}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{9\cdot 16}{25}+\frac{16x^2}{25}}+\sqrt{\frac{9\cdot 16}{25}+\frac{16y^2}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}\cdot(x^2+9)}+\sqrt{\frac{16}{25}\cdot(y^2+9)} =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}\right)\,.$$

Sposób II:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x \neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)| = |f'(c)| \cdot |x-y|\,,$$

gdzie c leży między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby $x \in [-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)| \leqslant \frac{4}{5}\,.$$

Bezpośrednie wyliczenia prowadzą do:

$$|f'(x)| = \left|\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+9}}\right| = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}\,,$$

co jest oczywiście mniejsze od $4/5$ dla $x=0$, natomiast dla $x \neq 0$ możemy kontynuować oszacowania:

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{25/16}} = \frac{4}{5}\,.$$

494. Niech funkcja $f:[4,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem
$$f(x)=\frac{1}{x^4}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[4,\infty)$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{256}\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności x, $y\geqslant 4$:
$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right|=\left|\frac{y^4-x^4}{x^4y^4}\right|=\frac{|x-y|\cdot(x^3+x^2y+xy^2+y^3)}{x^4y^4}=$$
$$=|x-y|\cdot\left(\frac{x^3}{x^4y^4}+\frac{x^2y}{x^4y^4}+\frac{xy^2}{x^4y^4}+\frac{y^3}{x^4y^4}\right)=|x-y|\cdot\left(\frac{1}{xy^4}+\frac{1}{x^2y^3}+\frac{1}{x^3y^2}+\frac{1}{x^4y}\right)\leqslant$$
$$\leqslant|x-y|\cdot\left(\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^5}\right)=|x-y|\cdot\frac{4}{4^5}=|x-y|\cdot\frac{1}{4^4}=|x-y|\cdot\frac{1}{256}\,,$$
co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych x, $y\geqslant 4$.

Nieco inna postać oszacowań:
$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right|=\left|\frac{y^4-x^4}{x^4y^4}\right|=\frac{|x-y|\cdot(x+y)\cdot(x^2+y^2)}{x^4y^4}=|x-y|\cdot\frac{x+y}{xy}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^3y^3}=$$
$$=|x-y|\cdot\left(\frac{x}{xy}+\frac{y}{xy}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{x^3y^3}+\frac{y^2}{x^3y^3}\right)=|x-y|\cdot\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{xy^3}+\frac{1}{x^3y}\right)\leqslant$$
$$\leqslant|x-y|\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^4}\right)=|x-y|\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4^4}=|x-y|\cdot\frac{1}{4^4}=|x-y|\cdot\frac{1}{256}\,.$$

Sposób II:

Dowodzona nierówność jest oczywista w przypadku $x=y$, natomiast dla $x\neq y$ stosujemy do funkcji f twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Na mocy tego twierdzenia istnieje taka liczba c pomiędzy x i y, a więc spełniająca nierówność $c>4$, że
$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|f'(c)|=\left|\frac{-4}{c^5}\right|=\frac{4}{c^5}<\frac{4}{4^5}=\frac{1}{4^4}=\frac{1}{256}\,,$$
co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

495. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}\right).$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą pomiędzy x i y.

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)|\leqslant 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x, co dowodzimy następująco:

$$|f'(x)|=\left|\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|=\frac{|e^x-e^{-x}|}{e^x+e^{-x}}\leqslant\frac{|e^x|+|-e^{-x}|}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1.$$

496. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(x^2+1\right).$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f'(x)|\leqslant 1.$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością między średnimi geometryczną i arytmetyczną prowadzą do:

$$|f'(x)|=\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|=\frac{\sqrt{x^2\cdot 1}}{\frac{x^2+1}{2}}\leqslant 1,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

497. Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(-\infty,0)$ spełnia warunki $f(1)=-2/3$ oraz $f(2)=-2/5$. Dowieść, że stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że

$$f'(x)=(f(x))^2 .$$

Wskazówka: $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję $g:(0,+\infty)\to(-\infty,0)$ określoną wzorem $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Wówczas $g(1)=-3/2$ i $g(2)=-5/2$, skąd na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej $c\in(1,2)$, że

$$g'(c)=\frac{g(2)-g(1)}{2-1}=\frac{-5/2-(-3/2)}{1}=-1 .$$

Z drugiej strony

$$g'(x)=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2} ,$$

skąd

$$-\frac{f'(c)}{(f(c))^2}=-1 ,$$

czyli

$$f'(c)=(f(c))^2 .$$

498. Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(2)=1$ i $f(4)=4$. Dowieść, że stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że

$$f'(x)=\sqrt{f(x)} .$$

Wskazówka: $g(x)=2\cdot\sqrt{f(x)}$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję $g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ określoną wzorem $g(x)=2\cdot\sqrt{f(x)}$. Wówczas $g(2)=2$ i $g(4)=4$, skąd na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej $c\in(2,4)$, że

$$g'(c)=\frac{g(4)-g(2)}{4-2}=1 .$$

Z drugiej strony

$$g'(x)=2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} ,$$

skąd

$$\frac{f'(c)}{\sqrt{f(c)}}=1 ,$$

czyli

$$f'(c)=\sqrt{f(c)} .$$