Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek 18.12.2020 i poniedziałek 21.12.2020.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

484. Udowodnić nierówności
$$\frac{1}{1301} < \operatorname{arctg} 51 - \operatorname{arctg} 49 < \frac{1}{1201}\,.$$

485. Udowodnić nierówności
$$\frac{1}{9} < \ln 9 - \ln 8 < \frac{1}{8}\,.$$

486. Udowodnić nierówności
$$\frac{1}{34} < \operatorname{arctg} 13 - \operatorname{arctg} 8 < \frac{1}{13}\,.$$

487. Udowodnić nierówność
$$\operatorname{arctg} 6 + \operatorname{arctg} 12 < \operatorname{arctg} 7 + \operatorname{arctg} 10\,.$$

488. Udowodnić nierówność
$$26 \cdot e^{\operatorname{arctg} 5} < 25 \cdot e^{\operatorname{arctg} 7}\,.$$

489. Dana jest funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt[\pi]{x^\pi+\pi}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

490. Dana jest funkcja $f:[-10,10]\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{10x^2+9000}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y\in[-10,10]$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

491. Dana jest funkcja $f:[-10,10]\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{5x^2+125}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y\in[-10,10]$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant 2\cdot|x-y|\,.$$

492. Dana jest funkcja $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{2x^2+2}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[-1,1]$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\ .$$

493. Dana jest funkcja $f:[-4,4]\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{x^2+9}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[-4,4]$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{4}{5}\cdot|x-y|\ .$$

494. Niech funkcja $f:[4,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem
$$f(x)=\frac{1}{x^4}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[4,\infty)$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{256}\,.$$

495. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}\right)\ .$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

496. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\ln\left(x^2+1\right)\ .$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\ .$$

497. Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(-\infty,0)$ spełnia warunki $f(1)=-2/3$ oraz $f(2)=-2/5$. Dowieść, że stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że
$$f'(x)=(f(x))^2\ .$$

Wskazówka: $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

498. Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(2)=1$ i $f(4)=4$. Dowieść, że stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że
$$f'(x)=\sqrt{f(x)}\,.$$

Wskazówka: $g(x)=2\cdot\sqrt{f(x)}$