Zadania do omówienia na ćwiczeniach zdalnych we wtorek 13.10.2020 i czwartek 15.10.2020.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

Część ćwiczeń może zostać poświęcona zadaniom z listy 1 wskazanym przez studentów.

Oznaczenia:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Obliczyć wartości wyrażeń:

24. $\sum\limits_{i=3}^{5} i^2$ **25.** $\sum\limits_{i=-99}^{100} i^3$ **26.** $\sum\limits_{i=-10}^{10} 7$ **27.** $\sum\limits_{i=1}^{100} i$ **28.** $\sum\limits_{i=1}^{24} i^2$ **29.** $\prod\limits_{i=1}^{6} i$ **30.** $\prod\limits_{i=-2020}^{2020} i^{2020}$

31. Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których prawdziwa jest podana implikacja:

a) $x>0 \Rightarrow x+1>2$ **b)** $x<1 \Rightarrow x^2>0$ **c)** $x<1 \Rightarrow x^2<0$ **d)** $x^5>32 \Rightarrow x^6>64$

e) $x^6>64 \Rightarrow x^7>128$ **f)** $x^5<32 \Rightarrow x^6<64$ **g)** $x^6<64 \Rightarrow x^7<128$

Oszustwo **32.** Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n < 2^n + 110\,. \qquad (*)$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ sprawdzamy bezpośrednio $30<2+110=112$.

2° Załóżmy, że $30n<2^n+110$. Udowodnimy nierówność $30(n+1)<2^{n+1}+110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1) = 30n+30 < 2^n+110+30 = 2^{n+1}+110+30-2^n < 2^{n+1}+110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n \geqslant 5$.

Zatem nierówność $(*)$ została udowodniona dla $n \geqslant 5$.

Pozostaje sprawdzić, że

dla $n=2$ mamy $60<4+110=114$,

dla $n=3$ mamy $90<8+110=118$,

dla $n=4$ mamy $120<16+110=126$.

Tym samym nierówność $(*)$ jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n.

W szczególności wykazaliśmy, że dla $n=6$ zachodzi nierówność $180<174$.

Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?