W każdym z kolejnych 10 zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

455. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $f'(1)=\mathbf{1/3}$ $f'(8)=\mathbf{1/12}$ $f'(27)=\mathbf{1/27}$

456. $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ $f'(1)=\mathbf{-1/2}$ $f'(2)=\mathbf{-8/125}$ $f'(3)=\mathbf{-3/250}$

457. $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)+\mathrm{arctg}2$ $f'(1)=\mathbf{1}$ $f'(2)=\mathbf{4/5}$ $f'(3)=\mathbf{3/5}$

458. $f(x)=\ln\left(x^3+1\right)$ $f'(1)=\mathbf{3/2}$ $f'(2)=\mathbf{4/3}$ $f'(3)=\mathbf{27/28}$

459. $f(x)=\mathrm{arctg}\left(x^2\right)$ $f'(1)=\mathbf{1}$ $f'(2)=\mathbf{4/17}$ $f'(3)=\mathbf{3/41}$

460. $f(x)=\sqrt{24x+1}$ $f'(0)=\mathbf{12}$ $f'(1)=\mathbf{12/5}$ $f'(2)=\mathbf{12/7}$

461. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x+8}$ $f'(-1)=\mathbf{1/6}$ $f'(0)=\mathbf{-1/12}$ $f'(1)=\mathbf{1/6}$

462. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^4-x^2+9}}$ $f'(-1)=\mathbf{1/27}$ $f'(0)=\mathbf{0}$ $f'(1)=\mathbf{-1/27}$

463. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^5-x+32}}$ $f'(-1)=\mathbf{-1/80}$ $f'(0)=\mathbf{1/320}$ $f'(1)=\mathbf{-1/80}$

464. $f(x)=\sqrt{8x+1}\cdot\sqrt[3]{7x^2+1}$ $f'(0)=\mathbf{4}$ $f'(1)=\mathbf{37/6}$ $f'(3)=\mathbf{303/40}$

465. Wyznaczyć równanie prostej, która jest styczna do obydwu następujących parabol: paraboli o równaniu $y=x^2$ oraz paraboli o równaniu $y=x^2-8x$.

Rozwiązanie:

Niech $(a,\, a^2)$ i $(b,\, b^2-8b)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x)=x^2$ i $g(x)=x^2-8x$. Ponieważ $f'(x)=2x$ oraz $g'(x)=2x-8$, równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y=f'(a)\cdot(x-a)+f(a) \quad \text{oraz} \quad y=g'(b)\cdot(x-b)+g(b)\,,$$

czyli

$$y=2a\cdot x-a^2 \quad \text{oraz} \quad y=(2b-8)\cdot x-b^2\,.$$

Aby obydwa powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a=2b-8 \quad \text{oraz} \quad -a^2=-b^2\,.$$

Z drugiego równania otrzymujemy $a=\pm b$, a ponieważ pierwsze równanie daje $b-a=4\neq 0$, musi być $a=-b$. Stąd $b=2$ oraz $a=-2$.

W konsekwencji szukana prosta ma równanie

$$y=-4x-4\,.$$

466. Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y=x^2+2$ oraz do paraboli o równaniu $y=-x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

Rozwiązanie:

Niech $(a,\, a^2+2)$ i $(b,\, -b^2)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x)=x^2+2$ i $g(x)=-x^2$. Ponieważ

$$f'(x)=2x \quad \text{oraz} \quad g'(x)=-2x\,,$$

równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y=f'(a)\cdot(x-a)+f(a) \quad \text{oraz} \quad y=g'(b)\cdot(x-b)+g(b)\,,$$

czyli

$$y=2a\cdot x-a^2+2 \quad \text{oraz} \quad y=-2b\cdot x+b^2\,.$$

Aby obydwa powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a=-2b \quad \text{oraz} \quad -a^2+2=b^2\,.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $b=-a$, co po wstawieniu do drugiego równania prowadzi do $a=\pm 1$ oraz $b=\mp 1$.

W konsekwencji istnieją dwie *fajne* proste, a ich równania to

$$y=2x+1 \quad \text{oraz} \quad y=-2x+1\,.$$

467. Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y=x^2+2$ oraz do paraboli o równaniu $y=2x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

Rozwiązanie:

Niech $(a,\, a^2+2)$ i $(b,\, 2b^2)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x)=x^2+2$ i $g(x)=2x^2$. Ponieważ

$$f'(x)=2x \qquad \text{oraz} \qquad g'(x)=4x\,,$$

równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y=f'(a)\cdot(x-a)+f(a) \qquad \text{oraz} \qquad y=g'(b)\cdot(x-b)+g(b)\,,$$

czyli

$$y=2a\cdot x-a^2+2 \qquad \text{oraz} \qquad y=4b\cdot x-2b^2\,.$$

Aby obydwa powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a=4b \qquad \text{oraz} \qquad -a^2+2=-2b^2\,.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $a=2b$, co po wstawieniu do drugiego równania prowadzi do $b=\pm 1$ oraz $a=\pm 2$.

W konsekwencji istnieją dwie *fajne* proste, a ich równania to

$$y=4x-2 \qquad \text{oraz} \qquad y=-4x-2\,.$$

468. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^5}$ jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^5}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^5}}{\sqrt[3]{x^3}}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x^3+x^5}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{1+x^2}=1\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna w zerze.

469. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^6}$ jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Z definicji pochodnych jednostronnych otrzymujemy

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^6}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^6}}{\sqrt[4]{x^4}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt[4]{\frac{x^4+x^6}{x^4}}=$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\sqrt[4]{1+x^2}=1$$

oraz

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^6}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^6}}{-|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^6}}{-\sqrt[4]{x^4}}=$$
$$=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt[4]{\frac{x^4+x^6}{x^4}}=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt[4]{1+x^2}=-1\,.$$

Ponieważ pochodne jednostronne funkcji f w zerze są różne, funkcja nie jest tam różniczkowalna.

Odpowiedź: Funkcja f nie jest różniczkowalna w zerze.

470. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x^2+1}-1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną prawostronną funkcji f w zerze:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{\sqrt[4]{h^2+1}-1}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{\frac{h^2}{\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{h^2+1}+1\right)}}}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{h^2+1}+1\right)}}=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}}=\frac{1}{2}\,.$$

Analogicznie obliczamy pochodną lewostronną funkcji f w zerze:

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{\sqrt[4]{h^2+1}-1}-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{\frac{h^2}{\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{h^2+1}+1\right)}}}{-|h|}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}-\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{h^2+1}+1\right)}}=-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}}=-\frac{1}{2}\,.$$

Ponieważ pochodne jednostronne funkcji f w zerze są różne, funkcja ta nie jest różniczkowalna w zerze.

471. Wyznaczyć taką wartość rzeczywistą parametru a, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}+a\cdot\sqrt[4]{\sqrt[4]{x^4+1}-1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną prawostronną funkcji f w zerze:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{\sqrt{h^2+1}-1}+a\cdot\sqrt[4]{\sqrt[4]{h^4+1}-1}-f(0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{\frac{h^2}{\sqrt{h^2+1}+1}}+a\cdot\sqrt[4]{\frac{h^4}{\left(\sqrt{h^4+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{h^4+1}+1\right)}}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{h^2+1}+1}}+a\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\left(\sqrt{h^4+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{h^4+1}+1\right)}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{a}{\sqrt[4]{4}}=\frac{1+a}{\sqrt{2}}\,.$$

Analogicznie obliczamy pochodną lewostronną funkcji f w zerze:

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{\sqrt{h^2+1}-1}+a\cdot\sqrt[4]{\sqrt[4]{h^4+1}-1}-f(0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{\frac{h^2}{\sqrt{h^2+1}+1}}+a\cdot\sqrt[4]{\frac{h^4}{\left(\sqrt{h^4+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{h^4+1}+1\right)}}}{-|h|}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\left(-\frac{1}{\sqrt{\sqrt{h^2+1}+1}}-a\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\left(\sqrt{h^4+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{h^4+1}+1\right)}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{a}{\sqrt[4]{4}}=\frac{-1-a}{\sqrt{2}}\,.$$

Funkcja f jest różniczkowalna w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(0^+)=f'(0^-)$, czyli

$$\frac{1+a}{\sqrt{2}}=\frac{-1-a}{\sqrt{2}}\,,$$

co zachodzi dla $a=-1$.

Odpowiedź: Podana funkcja jest różniczkowalna w zerze dla $a=-1$.

W każdym z kolejnych 8 zadań dla podanej funkcji $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ podaj wartości pochodnych jednostronnych funkcji f_i w zerze.

472. $f_1(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}$ $\quad f_1'(0^-)=\mathbf{-1/\sqrt{2}}$ $\quad f_1'(0^+)=\mathbf{1/\sqrt{2}}$

473. $f_2(x)=\sqrt{\sqrt{2x^2+1}-1}$ $\quad f_2'(0^-)=\mathbf{-1}$ $\quad f_2'(0^+)=\mathbf{1}$

474. $f_3(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+4}-2}$ $\quad f_3'(0^-)=\mathbf{-1/2}$ $\quad f_3'(0^+)=\mathbf{1/2}$

475. $f_4(x)=\sqrt{\sqrt{8x^2+81}-9}$ $\quad f_4'(0^-)=\mathbf{-2/3}$ $\quad f_4'(0^+)=\mathbf{2/3}$

476. $f_5(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x^2+1}-1}$ $\quad f_5'(0^-)=\mathbf{-1/2}$ $\quad f_5'(0^+)=\mathbf{1/2}$

477. $f_6(x)=\sqrt{\sqrt[4]{2x^2+1}-1}$ $\quad f_6'(0^-)=\mathbf{-1/\sqrt{2}}$ $\quad f_6'(0^+)=\mathbf{1/\sqrt{2}}$

478. $f_7(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x^2+16}-2}$ $\quad f_7'(0^-)=\mathbf{-1/\left(4\sqrt{2}\right)}$ $\quad f_7'(0^+)=\mathbf{1/\left(4\sqrt{2}\right)}$

479. $f_8(x)=\sqrt{\sqrt[4]{8x^2+81}-3}$ $\quad f_8'(0^-)=\mathbf{-\left(\sqrt{2}\right)/\left(3\sqrt{3}\right)}$ $\quad f_8'(0^+)=\mathbf{\left(\sqrt{2}\right)/\left(3\sqrt{3}\right)}$

480. Funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f(x)=1+x+2\sqrt{x}\,.$$
Funkcja g jest złożeniem 100 egzemplarzy funkcji f:
$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots)))\,.$$
Obliczyć $g'(100)$.

Rozwiązanie:

Niech f_n będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji f. Udowodnimy przez indukcję, że
$$f_n(x)=\left(\sqrt{x}+n\right)^2\,.$$

1° Zauważmy, że
$$f_1(x)=f(x)=\left(\sqrt{x}+1\right)^2\,,$$
zatem dowodzone twierdzenie jest prawdziwe dla $n=1$.

2° Zakładając
$$f_n(x)=\left(\sqrt{x}+n\right)^2\,,$$
otrzymujemy
$$f_{n+1}(x)=f\left(f_n(x)\right)=f\left(\left(\sqrt{x}+n\right)^2\right)=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}+n\right)^2}+1\right)^2=\left(\sqrt{x}+n+1\right)^2\,,$$
co kończy zasadniczą część dowodu indukcyjnego.

Ponieważ $g=f_{100}$,
$$g'(x)=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+100\right)^2=2\cdot\left(\sqrt{x}+100\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+100}{\sqrt{x}}=1+\frac{100}{\sqrt{x}}\,,$$
skąd $g'(100)=11$.