434. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x)=x^2$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność
$$|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:
Z równości
$$|f(x)-f(y)|=\left|x^2-y^2\right|=(x+y)\cdot|x-y|$$
wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek
$$x+y>100\,.$$
Możemy więc wskazać $x=50$, $y=51$.

435. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x)=\dfrac{1}{x}$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność
$$|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:
Z równości
$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{xy}\cdot|x-y|$$
wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek
$$\frac{1}{xy}>100\,,$$
czyli
$$xy<\frac{1}{100}\,.$$
Możemy więc wskazać $x=1/10$, $y=1/11$.

436. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{x^2+10^8}\,.$$
Dla wybranych przez siebie liczb rzeczywistych x, y udowodnić nierówność
$$|f(x)-f(y)|>0,6\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:
Zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów prowadzi do
$$|f(x)-f(y)|=\frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}\,.$$
Dana w treści zadania nierówność będzie spełniona, jeżeli $x\neq y$ oraz
$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}>0,6\,. \tag{1}$$

Dla uzyskania nierówności (1) wystarczy przyjąć, że x i y są różnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi spełniającymi warunki

$$x > 0,6 \cdot \sqrt{x^2+10^8} \tag{2}$$

oraz

$$y > 0,6 \cdot \sqrt{y^2+10^8} \,. \tag{3}$$

Przekształcanie nierówności (2) prowadzi (przy założeniu dodatniości x) do nierówności równoważnych:

$$x^2 > 0,6^2 \cdot x^2 + 0,6^2 \cdot 10^8 \,,$$

$$0,64 \cdot x^2 > 0,36 \cdot 10^8 \,,$$

$$x^2 > \frac{0,36 \cdot 10^8}{0,64} \,,$$

$$x^2 > \frac{36 \cdot 10^8}{64} \,,$$

$$x > \frac{6 \cdot 10^4}{8} \,,$$

$$x > \frac{3 \cdot 10^4}{4} \,,$$

$$x > 7500 \,.$$

Analogicznie nierówność (3) jest równoważna nierówności $y > 7500$.

Dana w treści zadania nierówność jest więc prawdziwa dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y większych od 7500, np. dla $x = 7501$ i $y = 7502$.

437. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant 10 \cdot |x-y| \,,$$

a dla każdych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunek $|x-y| \geqslant 10$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y| \,.$$

Dowieść, że

$$|f(6)-f(0)| \leqslant 50 \,.$$

Rozwiązanie:

Teza zadania wynika z następujących nierówności, wykorzystujących nierówność trójkąta oraz założenia o funkcji f:

$$|f(6)-f(0)| = |f(6)-f(10)+f(10)-f(0)| \leqslant |f(6)-f(10)| + |f(10)-f(0)| \leqslant$$

$$\leqslant 10 \cdot |6-10| + |10-0| = 40+10 = 50 \,.$$

438. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y| \quad \text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+5)-f(x)|\leqslant 5 \quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\,.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(8)-f(0)|\leqslant 35\,, \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$

$$|f(8)-f(0)|\leqslant 30\,. \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

Rozwiązanie:

Wersja łatwiejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(5)-f(0)|\leqslant 5$$

oraz

$$|f(8)-f(5)|\leqslant 10\cdot|8-5|=30\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych dwóch nierówności otrzymujemy

$$|f(8)-f(0)|=\left|\big(f(8)-f(5)\big)+\big(f(5)-f(0)\big)\right|\leqslant|f(8)-f(5)|+|f(5)-f(0)|\leqslant 30+5=35\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Wersja trudniejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(5)-f(0)|\leqslant 5\,,$$

$$|f(10)-f(5)|\leqslant 5$$

oraz

$$|f(8)-f(10)|\leqslant 10\cdot|8-10|=20\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych trzech nierówności otrzymujemy

$$|f(8)-f(0)|=\left|\big(f(8)-f(10)\big)+\big(f(10)-f(5)\big)+\big(f(5)-f(0)\big)\right|\leqslant$$

$$\leqslant|f(8)-f(10)|+|f(10)-f(5)|+|f(5)-f(0)|\leqslant 20+5+5=30\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

439. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y| \quad \text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+10)-f(x)|\leqslant 10 \quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\,.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(17)-f(0)|\leqslant 80\,, \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$

$$|f(17)-f(0)|\leqslant 50\,. \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

Rozwiązanie:

Wersja łatwiejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(10)-f(0)|\leqslant 10$$

oraz

$$|f(17)-f(10)|\leqslant 10\cdot|17-10|=70\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych dwóch nierówności otrzymujemy

$$|f(17)-f(0)|=\left|\left(f(17)-f(10)\right)+\left(f(10)-f(0)\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant|f(17)-f(10)|+|f(10)-f(0)|\leqslant 70+10=80\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Wersja trudniejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(10)-f(0)|\leqslant 10\,,$$
$$|f(20)-f(10)|\leqslant 10$$

oraz

$$|f(17)-f(20)|\leqslant 10\cdot|17-20|=30\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych trzech nierówności otrzymujemy

$$|f(17)-f(0)|=\left|\left(f(17)-f(20)\right)+\left(f(20)-f(10)\right)+\left(f(10)-f(0)\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant|f(17)-f(20)|+|f(20)-f(10)|+|f(10)-f(0)|\leqslant 30+10+10=50\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

440. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2\,.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

Rozwiązanie:

Ustalmy dowolne liczby rzeczywiste x, y. Dla dowolnej liczby naturalnej n przyjmijmy

$$t_0=x,\quad t_1=x+\frac{y-x}{n},\quad t_2=x+2\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_3=x+3\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_4=x+4\cdot\frac{y-x}{n},\quad\ldots$$

$$\ldots,\quad t_{n-2}=x+(n-2)\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_{n-1}=x+(n-1)\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_n=x+n\cdot\frac{y-x}{n}=y\,.$$

Powyższe punkty dzielą odcinek osi liczbowej od x do y na n równych części.

Wówczas na mocy założenia o funkcji f zachodzą nierówności

$$|f(t_0)-f(t_1)|\leqslant(t_0-t_1)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$

$$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant(t_1-t_2)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$

$$|f(t_2)-f(t_3)|\leqslant(t_2-t_3)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$

....

$$|f(t_{n-2})-f(t_{n-1})|\leqslant(t_{n-2}-t_{n-1})^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$

$$|f(t_{n-1})-f(t_n)|\leqslant(t_{n-1}-t_n)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych nierówności otrzymujemy

$$|f(x)-f(y)|=$$

$$=|(f(t_0)-f(t_1))+(f(t_1)-f(t_2))+(f(t_2)-f(t_3))+\ldots+(f(t_{n-1})-f(t_n))|\leqslant$$

$$\leqslant|f(t_0)-f(t_1)|+|f(t_1)-f(t_2)|+|f(t_2)-f(t_3)|+\ldots+|f(t_{n-1})-f(t_n)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(x-y)^2}{n^2}+\frac{(x-y)^2}{n^2}+\frac{(x-y)^2}{n^2}+\ldots+\frac{(x-y)^2}{n^2}=\frac{(x-y)^2}{n}\,.$$

Otrzymaliśmy więc nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{(x-y)^2}{n}$$

prawdziwą dla dowolnej liczby naturalnej n. Ponieważ lewa strona tej nierówności jest nieujemna i nie zależy od n, a prawa może osiągać dowolnie małe wartości dodatnie, otrzymujemy $|f(x)-f(y)|=0$. Stąd wynika, że $f(x)=f(y)$, a w konsekwencji f jest funkcją stałą.

441. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}\,.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4+x^3+x^2=x^4+x^3+\frac{x^2}{4}+\frac{3\cdot x^2}{4}=\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3\cdot x^2}{4}\geqslant 0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyzanaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{x^4+x^3+x^2}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^4+x^3+x^2)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\sqrt[4]{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)}=\frac{1}{(1+1)\cdot(1+1)}=\frac{1}{4}\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^4-t^4}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[4]{x^4}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{\frac{x^4+x^3+x^2}{x^4}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=-1\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^4+x^3+x^2)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+x^3+x^2}}{x^2}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+x^3+x^2}}{\sqrt{x^4}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(-\sqrt[4]{1+x^{-1}+x^{-2}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)}=\frac{1}{(-1-1)\cdot(1+1)}=-\frac{1}{4}\,.$$

Tyma razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^4-t^4}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=x+\frac{1}{4}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=-x-\frac{1}{4}$.

442. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}$.

Uwaga: Treść zadania jest poprawna - pod pierwiastkiem niczego nie brakuje - ma być tak jak jest napisane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4+4x^3+6x^2+1=x^4+4x^3+4x^2+2x^2+1=\left(x^2+2x\right)^2+2x^2+1>0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{x^4+4x^3+6x^2+1}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{1+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=1\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^4+4x^3+6x^2+1)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+6x^2+1}{\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+6x^{-1}+x^{-3}}{\left(\sqrt[4]{1+4x^{-1}+6x^{-2}+x^{-4}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+4x^{-1}+6x^{-2}+x^{-4}}+1\right)}=$$

$$=\frac{4}{(1+1)\cdot(1+1)}=1\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^4-t^4}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[4]{x^4}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{-\sqrt[4]{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{\frac{x^4+4x^3+6x^2+1}{x^4}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{1+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\right)=-1\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^4+4x^3+6x^2+1)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3+6x^2+1}{\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4+6x^{-1}+x^{-3}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}}{x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4+6x^{-1}+x^{-3}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{-\sqrt[4]{x^4}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}}{\sqrt{x^4}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4+6x^{-1}+x^{-3}}{\left(-\sqrt[4]{1+4x^{-1}+6x^{-2}+x^{-4}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+4x^{-1}+6x^{-2}+x^{-4}}+1\right)}=$$

$$=\frac{4}{(-1-1)\cdot(1+1)}=-1\,.$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^4-t^4}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)}$$

przy $s=\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}>0$ i $t=x<0$, a więc w sytuacji, gdy $s-t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=x+1$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=-x-1$.

443. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x)=x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^8+x^7+x^6+7=\left(x^4+\frac{x^3}{2}\right)^2+\frac{3x^6}{4}+7>0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\sqrt[8]{\frac{x^8+x^7+x^6+7}{x^8}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}1+\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}=1+1=2\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^8+x^7+x^6+7)-x^8}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}+x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7+x^6+7}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}+x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)}=\frac{1}{8}\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^8-t^8}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)\cdot(s^4+t^4)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[8]{x^8}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{-\sqrt[8]{x^8}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt[8]{\frac{x^8+x^7+x^6+7}{x^8}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}\right)=1-1=0\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^8+x^7+x^6+7)-x^8}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^7+x^6+7}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}}{x^2}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}}{x^4}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{-\sqrt[8]{x^8}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}}{\sqrt[4]{x^8}}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}}{\sqrt{x^8}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(-\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}-1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{(-1-1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)}=-\frac{1}{8}\,.$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^8-t^8}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)\cdot(s^4+t^4)}$$

przy $s=\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}>0$ i $t=x<0$, a więc w sytuacji, gdy $s-t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=2x+\dfrac{1}{8}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę poziomą o równaniu $y=-\dfrac{1}{8}$.

444. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Uwaga: Nie wolno używać reguły de l'Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej. Ta sama uwaga dotyczy kolejnych dwóch zadań.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy:

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{y^2-x^2}{\left(\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot(y-x)}=$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{(y-x)\cdot(y+x)}{\left(\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot(y-x)}=\lim_{y\to x}\frac{y+x}{\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{x+x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{2\cdot x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

445. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x}$ na przedziale $(0,+\infty)$.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz wzór na różnicę czwartych potęg otrzymujemy:

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x}}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{y-x}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\cdot(y-x)}=$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\frac{1}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{(2\cdot\sqrt[4]{x})\cdot(2\cdot\sqrt{x})}=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}}\,.$$

446. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^8+1}$.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz pięciokrotnie wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy:

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{\sqrt[4]{y^8+1}-\sqrt[4]{x^8+1}}{y-x}=$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{y^8-x^8}{\left(\sqrt{y^8+1}+\sqrt{x^8+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{y^8+1}+\sqrt[4]{x^8+1}\right)\cdot(y-x)}=$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{(y-x)\cdot(y+x)\cdot(x^2+y^2)\cdot(x^4+y^4)}{\left(\sqrt{y^8+1}+\sqrt{x^8+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{y^8+1}+\sqrt[4]{x^8+1}\right)\cdot(y-x)}=$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{(y+x)\cdot(x^2+y^2)\cdot(x^4+y^4)}{\left(\sqrt{y^8+1}+\sqrt{x^8+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{y^8+1}+\sqrt[4]{x^8+1}\right)}=$$

$$=\frac{(x+x)\cdot(x^2+x^2)\cdot(x^4+x^4)}{\left(\sqrt{x^8+1}+\sqrt{x^8+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+1}+\sqrt[4]{x^8+1}\right)}=$$

$$=\frac{2x\cdot 2x^2\cdot 2x^4}{2\sqrt{x^8+1}\cdot 2\sqrt[4]{x^8+1}}=\frac{2x^7}{(x^8+1)^{3/4}}\,.$$