362. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x\}^2+c\cdot\{x\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=\mathbf{-1}$, $c=\mathbf{0}$

b) $a=\mathbf{-2}$, $b=2$, $c=\mathbf{0}$

c) $a=$ **NIE**, $b=$ **NIE**, $c=3$

d) $a=2$, $b=\mathbf{-2}$, $c=\mathbf{0}$

e) $a=\mathbf{-3}$, $b=3$, $c=\mathbf{0}$

f) $a=$ **NIE**, $b=$ **NIE**, $c=5$

363. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{x\}+c\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=\mathbf{-1}$, $c=\mathbf{-1}$

b) $a=\mathbf{-2}$, $b=2$, $c=\mathbf{2}$

c) $a=\mathbf{-3}$, $b=\mathbf{3}$, $c=3$

d) $a=4$, $b=\mathbf{-4}$, $c=\mathbf{-4}$

e) $a=\mathbf{-5}$, $b=5$, $c=\mathbf{5}$

f) $a=\mathbf{-6}$, $b=\mathbf{6}$, $c=6$

364. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{dla} \quad x<0 \\ dx+e & \text{dla} \quad 0\leqslant x<1 \\ ax^2+bx+c & \text{dla} \quad 1\leqslant x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=\mathbf{3}$, $e=\mathbf{3}$

b) $a=1$, $b=2$, $c=$ **NIE**, $d=4$, $e=$ **NIE**

c) $a=1$, $b=\mathbf{3}$, $c=\mathbf{5}$, $d=4$, $e=5$

d) $a=\mathbf{2}$, $b=7$, $c=8$, $d=9$, $e=\mathbf{8}$

e) $a=6$, $b=7$, $c=\mathbf{10}$, $d=\mathbf{13}$, $e=10$

f) $a=6$, $b=\mathbf{3}$, $c=8$, $d=9$, $e=\mathbf{8}$

365. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{x\}+b\cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x, a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje **w wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b), dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

Rozwiązanie:

Funkcja f zależy od $\{x\}$, jest więc okresowa z okresem 1. Ponadto f jest ciągła we wszystkich punktach niecałkowitych. Pozostaje zbadać ciągłość funkcji f w punktach całkowitych, a wobec jej okresowości, wystarczy zbadać ciągłość w punkcie 1.

Ponieważ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=a+3b$$

oraz

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=b,$$

funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a+3b=b,$$

czyli

$$a=-2b.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $a=-2b$.

366. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x+1\}+c\cdot\{x\}+d\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=$ **−3**, $d=$ **−3**

b) $a=$ **−5**, $b=2$, $c=3$, $d=$ **3**

c) $a=$ **NIE**, $b=$ **NIE**, $c=3$, $d=4$

d) $a=2$, $b=3$, $c=$ **−5**, $d=$ **−5**

e) $a=$ **−9**, $b=3$, $c=6$, $d=$ **6**

f) $a=$ **dowolne**, $b=$ **−6−a**, $c=6$, $d=6$

367. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\{x\}^3+b\{x\}^2+c\{x\}+d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a=\mathbf{-5}$, $b=2$, $c=3$, $d=4$

b) $a=1$, $b=\mathbf{-4}$, $c=3$, $d=4$

c) $a=1$, $b=2$, $c=\mathbf{-3}$, $d=4$

d) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=$ **NIE**

368. Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 4 & \text{dla} \quad x<a \\ |x^2-5| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ 4 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła.

Rozwiązanie:

Oczywiście funkcja f jest ciągła w każdym punkcie różnym od a i b.

Ponadto

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=4$$

oraz

$$f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\left|a^2-5\right|,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$4=\left|a^2-5\right|.$$

Przekształcanie powyższego równania prowadzi kolejno do

$$a^2-5=\pm 4,$$

$$a^2=5\pm 4,$$

skąd $a\in\{-3, -1, 1, 3\}$.

Podobnie

$$\lim_{x\to b^-} f(x)=\left|b^2-5\right|$$

oraz

$$f(b)=\lim_{x\to b^+} f(x)=4,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie b wtedy i tylko wtedy, gdy

$$4=\left|b^2-5\right|,$$

czyli $b\in\{-3, -1, 1, 3\}$.

Zatem funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $a,b\in\{-3, -1, 1, 3\}$, co w połączeniu z warunkiem $a<b$ prowadzi do sześciu par (a, b) spełniających warunki zadania.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez pary $(-3, -1)$, $(-3, 1)$, $(-3, 3)$, $(-1, 1)$, $(-1, 3)$, $(1, 3)$.

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

369. $f(x)=\begin{cases} \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a \\ 3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$ $\qquad a=\mathbf{-1}, \qquad b=\mathbf{1}.$

370. $f(x)=\begin{cases} \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a \\ 4 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$ $\qquad a=\mathbf{-3}, \qquad b=\mathbf{3}.$

371. $f(x)=\begin{cases} \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a \\ 5 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$ $\qquad a=\mathbf{-5}, \qquad b=\mathbf{5}.$

372. $f(x)=\begin{cases} \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a \\ 6 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$ $\qquad a=-\sqrt{\mathbf{57}}, \qquad b=\sqrt{\mathbf{57}}.$

373. $f(x)=\begin{cases} \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a \\ 7 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$ $\qquad a=\mathbf{-11}, \qquad b=\mathbf{11}.$

374. Podać wszystkie trzy pary parametrów (a, b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad x<a \\ x^3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła.

$a=\mathbf{-1},\ b=\mathbf{0}$ $\qquad a=\mathbf{-1},\ b=\mathbf{1}$ $\qquad a=\mathbf{0},\ b=\mathbf{1}$

375. Podać wszystkie sześć par parametrów (a, b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 6 & \text{dla} \quad x<a \\ |x^2-10x+15| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ 6 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła.

$a=\mathbf{1},\ b=\mathbf{3}$ $\qquad a=\mathbf{1},\ b=\mathbf{7}$ $\qquad a=\mathbf{1},\ b=\mathbf{9}$

$a=\mathbf{3},\ b=\mathbf{7}$ $\qquad a=\mathbf{3},\ b=\mathbf{9}$ $\qquad a=\mathbf{7},\ b=\mathbf{9}$

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

376.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ 1 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad a=\mathbf{-1}, \qquad b=\mathbf{1}.$$

377.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad a=\mathbf{0}, \qquad b=\mathbf{1}.$$

378.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x+2 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad a=\mathbf{-1}, \qquad b=\mathbf{2}.$$

379.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x+6 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad a=\mathbf{-2}, \qquad b=\mathbf{3}.$$

380.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ 2x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad a=\mathbf{0}, \qquad b=\mathbf{2}.$$

W każdym z trzech poniższych zadań podaj takie trzy pary liczb rzeczywistych $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

381. $$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^3 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} a=\mathbf{-8}, & b=\mathbf{0} \\ a=\mathbf{-8}, & b=\mathbf{8} \\ a=\mathbf{0}, & b=\mathbf{8} \end{array}$$

382. $$f(x)=\begin{cases} x^6 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x^2 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^6 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} a=\mathbf{-2\sqrt{2}}, & b=\mathbf{0} \\ a=\mathbf{-2\sqrt{2}}, & b=\mathbf{2\sqrt{2}} \\ a=\mathbf{0}, & b=\mathbf{2\sqrt{2}} \end{array}$$

383. $$f(x)=\begin{cases} x^9 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x^3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^9 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} a=\mathbf{-2}, & b=\mathbf{0} \\ a=\mathbf{-2}, & b=\mathbf{2} \\ a=\mathbf{0}, & b=\mathbf{2} \end{array}$$

W każdym z poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji lub granicy niewłaściwej $+\infty=\infty$ albo $-\infty$. Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Możesz wykorzystać granicę

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$

384. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x = -\infty$

385. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x = +\infty$

386. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x = +\infty$

387. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x = -\infty$

388. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x = +\infty$

389. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x = 0$

390. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x = 0$

391. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x = +\infty$

392. $\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{arctg}x = \pi/2$

393. $\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{arctg}2x = \pi/2$

394. $\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{17}-4\right)x = \pi/2$

395. $\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{13}-4\right)x = -\pi/2$

396. $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{x-64} = 1/48$

397. $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{x-64}{\sqrt{x}-8} = 16$

398. $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8} = 1/3$

399. $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{2^{1/x}} = +\infty$

400. $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{2^{1/x}} = 1$

401. $\lim\limits_{x\to +\infty}2^{2^{1/x}} = 2$

402. $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{2^{2^{1/x}}} = +\infty$

403. $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{2^{2^{1/x}}} = 2$

404. $\lim\limits_{x\to +\infty}2^{2^{2^{1/x}}} = 4$

405. $\lim\limits_{x\to 16^-}\{\log_4 x\} = 1$

406. $\lim\limits_{x\to 16^+}\{\log_4 x\} = 0$

407. $\lim\limits_{x\to 16^-}\{\log_8 x\} = 1/3$

408. $\lim\limits_{x\to 16^+}\{\log_8 x\} = 1/3$

409. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^2$

410. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = e^3$

411. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+4)^x} = e^{e^4}$

412. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+27)^x} = e^{e^{27}}$

413. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+256)^x} = e^{e^{256}}$

414. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{5^{4^{3^x}}} = \mathbf{32}$

415. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{2^{5^{4^x}}} = \mathbf{9}$

416. $\lim\limits_{x\to-\infty} 4^{3^{2^{5^x}}} = \mathbf{64}$

417. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\log_2(x+32)-\log_2(x+4)\big) = \mathbf{0}$

418. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\log_2(32x+1)-\log_2(x+4)\big) = \mathbf{5}$

419. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\log_2(32x+1)-\log_2(4x+1)\big) = \mathbf{3}$

420. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \mathbf{e^2}$

421. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \mathbf{e^8}$

422. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \sqrt{\mathbf{e}}$

423. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt[4]{\mathbf{e}}$

W każdym z poniższych 10 zadań dla podanej liczby a podaj taką liczbę b, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=a|x|+bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x))=x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

424. $a=1$, $b=\mathbf{-\sqrt{2}}$

425. $a=-1$, $b=\mathbf{-\sqrt{2}}$

426. $a=2$, $b=\mathbf{-\sqrt{5}}$

427. $a=-2$, $b=\mathbf{-\sqrt{5}}$

428. $a=3$, $b=\mathbf{-\sqrt{10}}$

429. $a=-3$, $b=\mathbf{-\sqrt{10}}$

430. $a=3/4$, $b=\mathbf{-5/4}$

431. $a=-3/4$, $b=\mathbf{-5/4}$

432. $a=4/3$, $b=\mathbf{-5/3}$

433. $a=-4/3$, $b=\mathbf{-5/3}$