Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek 8.12.2020 i czwartek 10.12.2020.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

362. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem
$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x\}^2+c\cdot\{x\},$$
gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=$ ...., $c=$ ....
b) $a=$ ...., $b=2$, $c=$ ....
c) $a=$ ...., $b=$ ...., $c=3$
d) $a=2$, $b=$ ...., $c=$ ....
e) $a=$ ...., $b=3$, $c=$ ....
f) $a=$ ...., $b=$ ...., $c=5$

363. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem
$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{x\}+c\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$
gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=$ ...., $c=$ ....
b) $a=$ ...., $b=2$, $c=$ ....
c) $a=$ ...., $b=$ ...., $c=3$
d) $a=4$, $b=$ ...., $c=$ ....
e) $a=$ ...., $b=5$, $c=$ ....
f) $a=$ ...., $b=$ ...., $c=6$

364. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem
$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{dla} \quad x<0 \\ dx+e & \text{dla} \quad 0\leqslant x<1 \\ ax^2+bx+c & \text{dla} \quad 1\leqslant x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=$ ...., $e=$ ....
b) $a=1$, $b=2$, $c=$ ...., $d=4$, $e=$ ....
c) $a=1$, $b=$ ...., $c=$ ...., $d=4$, $e=5$
d) $a=$ ...., $b=7$, $c=8$, $d=9$, $e=$ ....
e) $a=6$, $b=7$, $c=$ ...., $d=$ ...., $e=10$
f) $a=6$, $b=$ ...., $c=8$, $d=9$, $e=$ ....

365. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{x\}+b\cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x, a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje **w wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b), dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

366. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x+1\}+c\cdot\{x\}+d\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=$ ...., $d=$ ....

b) $a=$ ...., $b=2$, $c=3$, $d=$ ....

c) $a=$ ...., $b=$ ...., $c=3$, $d=4$

d) $a=2$, $b=3$, $c=$ ...., $d=$ ....

e) $a=$ ...., $b=3$, $c=6$, $d=$ ....

f) $a=$ ...., $b=$ ...., $c=6$, $d=6$

367. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\{x\}^3+b\{x\}^2+c\{x\}+d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a=$ ...., $b=2$, $c=3$, $d=4$

b) $a=1$, $b=$ ...., $c=3$, $d=4$

c) $a=1$, $b=2$, $c=$ ...., $d=4$

d) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=$ ....

368. Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 4 & \text{dla} \quad x<a \\ |x^2-5| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ 4 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła.

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

369. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots,\qquad b=\ldots\ldots\ldots.$

370. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 4 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots,\qquad b=\ldots\ldots\ldots.$

371. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 5 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots,\qquad b=\ldots\ldots\ldots.$

372. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 6 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots,\qquad b=\ldots\ldots\ldots.$

373. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 7 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots,\qquad b=\ldots\ldots\ldots.$

374. Podać wszystkie trzy pary parametrów $(a,\,b)$, gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{dla} \quad x<a\\ x^3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ x & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$$

jest ciągła.

$a=\ \ldots\ldots,\ b=\ \ldots\ldots$ $a=\ \ldots\ldots,\ b=\ \ldots\ldots$ $a=\ \ldots\ldots,\ b=\ \ldots\ldots$

375. Podać wszystkie sześć par parametrów $(a,\,b)$, gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}6 & \text{dla} \quad x<a\\ |x^2-10x+15| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ 6 & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$$

jest ciągła.

$a=\ \ldots\ldots,\ b=\ \ldots\ldots$ $a=\ \ldots\ldots,\ b=\ \ldots\ldots$ $a=\ \ldots\ldots,\ b=\ \ldots\ldots$

$a=\ \ldots\ldots,\ b=\ \ldots\ldots$ $a=\ \ldots\ldots,\ b=\ \ldots\ldots$ $a=\ \ldots\ldots,\ b=\ \ldots\ldots$

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

376.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla } x<a \\ 1 & \text{dla } a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla } b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

377.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla } x<a \\ x & \text{dla } a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla } b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

378.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla } x<a \\ x+2 & \text{dla } a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla } b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

379.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla } x<a \\ x+6 & \text{dla } a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla } b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

380.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla } x<a \\ 2x & \text{dla } a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla } b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

W każdym z trzech poniższych zadań podaj takie trzy pary liczb rzeczywistych $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

381. $$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{dla } x<a \\ 64x & \text{dla } a\leqslant x<b \\ x^3 & \text{dla } b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

382. $$f(x)=\begin{cases} x^6 & \text{dla } x<a \\ 64x^2 & \text{dla } a\leqslant x<b \\ x^6 & \text{dla } b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

383. $$f(x)=\begin{cases} x^9 & \text{dla } x<a \\ 64x^3 & \text{dla } a\leqslant x<b \\ x^9 & \text{dla } b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

W każdym z poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji lub granicy niewłaściwej $+\infty=\infty$ albo $-\infty$. Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Możesz wykorzystać granicę

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$

384. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x=$ ....

385. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x=$ ....

386. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x=$ ....

387. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x=$ ....

388. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x=$ ....

389. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x=$ ....

390. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x=$ ....

391. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x=$ ....

392. $\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{arctg}\, x=$ ....

393. $\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{arctg}\, 2x=$ ....

394. $\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{17}-4\right)x=$ ....

395. $\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{13}-4\right)x=$ ....

396. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{x-64}=$ ....

397. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{x-64}{\sqrt{x}-8}=$ ....

398. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}=$ ....

399. $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{2^{1/x}}=$ ....

400. $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{2^{1/x}}=$ ....

401. $\lim\limits_{x\to +\infty}2^{2^{1/x}}=$ ....

402. $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{2^{2^{1/x}}}=$ ....

403. $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{2^{2^{1/x}}}=$ ....

404. $\lim\limits_{x\to +\infty}2^{2^{2^{1/x}}}=$ ....

405. $\lim\limits_{x\to 16^-}\{\log_4 x\}=$ ....

406. $\lim\limits_{x\to 16^+}\{\log_4 x\}=$ ....

407. $\lim\limits_{x\to 16^-}\{\log_8 x\}=$ ....

408. $\lim\limits_{x\to 16^+}\{\log_8 x\}=$ ....

409. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = \ldots\ldots\ldots$ **410.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} = \ldots\ldots\ldots$

411. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+4)^x} = \ldots$ **412.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+27)^x} = \ldots$

413. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+256)^x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

414. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{5^{4^{3^x}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **415.** $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{2^{5^{4^x}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

416. $\lim\limits_{x\to-\infty} 4^{3^{2^{5^x}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

417. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\log_2(x+32)-\log_2(x+4)\big) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

418. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\log_2(32x+1)-\log_2(x+4)\big) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

419. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\log_2(32x+1)-\log_2(4x+1)\big) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

420. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \ldots\ldots\ldots$ **421.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \ldots\ldots\ldots$

422. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \ldots\ldots\ldots$ **423.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{x^2+4}} = \ldots\ldots\ldots$

W każdym z poniższych 10 zadań dla podanej liczby a podaj taką liczbę b, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=a|x|+bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x))=x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

424. $a=1$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$ **425.** $a=-1$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$

426. $a=2$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$ **427.** $a=-2$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$

428. $a=3$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$ **429.** $a=-3$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$

430. $a=3/4$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$ **431.** $a=-3/4$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$

432. $a=4/3$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$ **433.** $a=-4/3$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$