354. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+10^4}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{20}\,.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4-b^4=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right),$$

który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}\,.$$

Przyjmując $a=\sqrt[4]{x^2+10^4}$ oraz $b=\sqrt[4]{y^2+10^4}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[4]{x^2+10^4}-\sqrt[4]{y^2+10^4}\right|=$$

$$=\left|\frac{(x^2+10^4)-(y^2+10^4)}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\right)}\right|=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\right)}\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}}<1\,.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{0+10^4}+\sqrt[4]{0+10^4}}=\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}\,.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^4}+\sqrt[4]{y^2+10^4}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^4}+\sqrt{y^2+10^4}}\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{20}\cdot 1=\frac{|x-y|}{20}\,.$$

355. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+1}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia
$$a^4-b^4=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\,,$$
który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci
$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}\,.$$
Przyjmując $a=\sqrt[4]{x^4+1}$ oraz $b=\sqrt[4]{y^4+1}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:
$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[4]{y^4+1}\right|=$$
$$=\left|\frac{(x^4+1)-(y^4+1)}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)}\right|= \qquad (1)$$
$$=\frac{|x^4-y^4|}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)}=$$
$$=\frac{|x^2-y^2|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)}=$$
$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)}\,. \qquad (2)$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:
$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{y^4}<\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\,,$$
skąd
$$\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}}<1\,. \qquad (3)$$

Podobnie, wykorzystując równość $x^2=\sqrt{x^4}$ otrzymujemy:
$$x^2+y^2=\sqrt{x^4}+\sqrt{y^4}<\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\,,$$
skąd
$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}}<1\,. \qquad (4)$$

Połączenie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:
$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}\right)}=$$
$$=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[4]{y^4+1}}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}}\leqslant|x-y|\cdot 1\cdot 1=|x-y|\,.$$

356. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[8]{x^4+10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{20}\,.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^8-b^8=\left(a^4-b^4\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=$$
$$=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)\,,$$

który przy założeniu $a+b\neq0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)}\,.$$

Przyjmując $a=\sqrt[8]{x^4+10^8}$ oraz $b=\sqrt[8]{y^4+10^8}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[8]{x^4+10^8}-\sqrt[8]{y^4+10^8}\right|=$$
$$=\left|\frac{(x^4+10^8)-(y^4+10^8)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}\right|=$$
$$=\frac{|x^4-y^4|}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}=$$
$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}\,.\qquad(1)$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{y^4}<\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}}<1\,.\qquad(2)$$

Z kolei równość $x^2=\sqrt{x^4}$ prowadzi do:

$$x^2+y^2=\sqrt{x^4}+\sqrt{y^4}<\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\,,$$

skąd

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}}<1\,.\qquad(3)$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[8]{0+10^8}+\sqrt[8]{0+10^8}}=\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}\,.\qquad(4)$$

Zastosowanie nierówności (2), (3) i (4) do (1) pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|\cdot(x^2+y^2)}{\left(\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{x^4+10^8}+\sqrt[8]{y^4+10^8}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+10^8}+\sqrt[4]{y^4+10^8}}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+10^8}+\sqrt{y^4+10^8}}\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{20}\cdot 1\cdot 1=\frac{|x-y|}{20}\,.$$

357. Niech funkcja $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt[16]{x}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[1,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{16}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności stosując czterokrotnie wzór na różnicę kwadratów[1], a następnie szacujemy korzystając z nierówności $x,\,y\geqslant 1$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[16]{x}-\sqrt[16]{y}\right|=\frac{|x-y|}{\left(\sqrt[16]{x}+\sqrt[16]{y}\right)\cdot\left(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|x-y|}{\left(\sqrt[16]{1}+\sqrt[16]{1}\right)\cdot\left(\sqrt[8]{1}+\sqrt[8]{1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{1}\right)\cdot\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)}=\frac{|x-y|}{16}\,,$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x,\,y\geqslant 1$.

358. Niech funkcja $f:[3,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\frac{1}{x^3}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[3,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{25}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x,\,y\geqslant 3$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right|=\left|\frac{y^3-x^3}{x^3y^3}\right|=\frac{|x-y|\cdot(x^2+xy+y^2)}{x^3y^3}=$$

$$=|x-y|\cdot\left(\frac{x^2}{x^3y^3}+\frac{xy}{x^3y^3}+\frac{y^2}{x^3y^3}\right)=|x-y|\cdot\left(\frac{1}{xy^3}+\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{x^3y}\right)\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^4}\right)=|x-y|\cdot\frac{3}{3^4}=|x-y|\cdot\frac{1}{3^3}=\frac{|x-y|}{27}\leqslant\frac{|x-y|}{25}\,,$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x,\,y\geqslant 3$.

[1] Można również zastosować ogólny wzór na różnicę n-tych potęg dla $n=16$.

359. Niech funkcja $f:[16,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[16,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{128}.$$

Rozwiązanie:
Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności x, $y\geqslant 16$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{\sqrt[4]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\right|=\frac{\left|\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right|}{\sqrt[4]{xy}}=\frac{\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|}{\sqrt[4]{xy}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|}{\sqrt[4]{xy}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\leqslant\frac{|x-y|}{\sqrt[4]{16\cdot 16}\cdot\left(\sqrt[4]{16}+\sqrt[4]{16}\right)\cdot\left(\sqrt{16}+\sqrt{16}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|}{4\cdot(2+2)\cdot(4+4)}=\frac{|x-y|}{128},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych x, $y\geqslant 16$.

360. Niech funkcja $f:[8,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\frac{1}{x}$.
Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[8,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C=1/60$.

Rozwiązanie:
Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności x, $y\geqslant 8$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{|x-y|}{xy}\leqslant\frac{|x-y|}{8\cdot 8}=\frac{|x-y|}{64}\leqslant\frac{|x-y|}{60},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C=1/60$ i dowolnych x, $y\geqslant 8$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C=1/80$.

Rozwiązanie:
Dla $x=8$ oraz $y=9$ mamy $|x-y|=1$ oraz

$$|f(x)-f(y)|=\frac{1}{72}>\frac{|x-y|}{80},$$

wskazaliśmy więc przykład liczb x, $y\geqslant 8$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C=1/80$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[8,\infty)$.

361. Niech funkcja $f:[25,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt{x}$.
Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[25,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C=1/10$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x,\,y\geqslant 25$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|=\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leqslant\frac{|x-y|}{\sqrt{25}+\sqrt{25}}=\frac{|x-y|}{5+5}=\frac{|x-y|}{10}\,,$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C=1/10$ i dowolnych $x,\,y\geqslant 25$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C=1/12$.

Rozwiązanie:

Dla $x=25$ oraz $y=36$ mamy $|x-y|=11$ oraz

$$|f(x)-f(y)|=1=\frac{|x-y|}{11}>\frac{|x-y|}{12}\,,$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x,\,y\geqslant 25$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C=1/12$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[25,\infty)$.