278. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-9}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{4n^2-9} = \frac{1}{(2n-3)(2n+3)} = \frac{A}{2n-3} + \frac{B}{2n+3}\,.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(2n-3)(2n+3)$ otrzymujemy

$$1 = A(2n+3)+B(2n-3)\,. \qquad (*)$$

Dla $n=3/2$ otrzymujemy $A=1/6$, natomiast przyjęcie $n=-3/2$ daje $B=-1/6$.
Inny sposób: porównując w równaniu (*) współczynniki przy n oraz wyrazy wolne dostajemy układ równań i go rozwiązujemy.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4n^2-9} = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{15}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{2N-7}-\frac{1}{2N-1}\right)+\left(\frac{1}{2N-5}-\frac{1}{2N+1}\right)+\left(\frac{1}{2N-3}-\frac{1}{2N+3}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{-1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2N+1}-\frac{1}{2N+3}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2N+1}-\frac{1}{2N+3}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/18$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/18$.

279. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{n^2+3n} = \frac{1}{n\cdot(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3}\,.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n\cdot(n+3)$ otrzymujemy

$$1 = A(n+3)+Bn\,.$$

Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/3$, natomiast przyjęcie $n=-3$ daje $B=-1/3$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+3n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) =$$

$$=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+2}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+3}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $11/18$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $11/18$.

280. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+3n-2}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{9n^2+3n-2}=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{A}{3n-1}+\frac{B}{3n+2}\,.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(3n-1)(3n+2)$ otrzymujemy

$$1=A(3n+2)+B(3n-1)\,.$$

Dla $n=1/3$ otrzymujemy $A=1/3$, natomiast przyjęcie $n=-2/3$ daje $B=-1/3$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{9n^2+3n-2}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3N-7}-\frac{1}{3N-4}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{3N-4}-\frac{1}{3N-1}\right)+\left(\frac{1}{3N-1}-\frac{1}{3N+2}\right)\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3N+2}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/6$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/6$.

281. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-4}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{n^2-4}=\frac{1}{(n-2)(n+2)}=\frac{A}{n-2}+\frac{B}{n+2}\,.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(n-2)(n+2)$ otrzymujemy

$$1=A(n+2)+B(n-2)\,.$$

Dla $n=2$ otrzymujemy $A=1/4$, natomiast przyjęcie $n=-2$ daje $B=-1/4$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N=\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n^2-4}=\frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{N-6}-\frac{1}{N-2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{N-5}-\frac{1}{N-1}\right)+\left(\frac{1}{N-4}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N+2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $25/48$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $25/48$.

282. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+2)\cdot(n+3)}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wyrażenie pod znakiem sumy na ułamki proste, czyli szukamy takich liczb A, B i C, że

$$\frac{1}{n\cdot(n+2)\cdot(n+3)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}+\frac{C}{n+3}\,. \qquad (1)$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n\cdot(n+2)\cdot(n+3)$ otrzymujemy

$$1=A\cdot(n+2)\cdot(n+3)+B\cdot n\cdot(n+3)+C\cdot n\cdot(n+2)\,.$$

Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/6$, dla $n=-2$ dostajemy $B=-1/2$, natomiast przyjęcie $n=-3$ daje $C=1/3$. Można też ułożyć układ równań na współczynniki i go rozwiązać.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\cdot(n+2)\cdot(n+3)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1/6}{n}-\frac{1/2}{n+2}+\frac{1/3}{n+3}\right)=$$

$$=\left(\frac{1/6}{1}-\frac{1/2}{3}+\frac{1/3}{4}\right)+\left(\frac{1/6}{2}-\frac{1/2}{4}+\frac{1/3}{5}\right)+\left(\frac{1/6}{3}-\frac{1/2}{5}+\frac{1/3}{6}\right)+\left(\frac{1/6}{4}-\frac{1/2}{6}+\frac{1/3}{7}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1/6}{N-2}-\frac{1/2}{N}+\frac{1/3}{N+1}\right)+\left(\frac{1/6}{N-1}-\frac{1/2}{N+1}+\frac{1/3}{N+2}\right)+\left(\frac{1/6}{N}-\frac{1/2}{N+2}+\frac{1/3}{N+3}\right)=$$

$$=\frac{1/6}{1}+\frac{1/6}{2}-\frac{1/3}{3}-\frac{1/6}{N+1}-\frac{1/6}{N+2}+\frac{1/3}{N+3}=\frac{5}{36}-\frac{1/6}{N+1}-\frac{1/6}{N+2}+\frac{1/3}{N+3}\,,$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $5/36$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $5/36$.

283. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że
$$\frac{1}{n^2+5n}=\frac{1}{n\cdot(n+5)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+5}\,.$$
Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n\cdot(n+5)$ otrzymujemy
$$1=A(n+5)+Bn\,.$$
Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/5$, natomiast przyjęcie $n=-5$ daje $B=-1/5$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem
$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+5n}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+5}\right)=$$
$$=\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{12}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N+2}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N+3}\right)+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+4}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+5}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}-\frac{1}{N+4}-\frac{1}{N+5}\right),$$
co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do
$$\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{60+30+20+15+12}{60}=\frac{137}{300}\,.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą 137/300.

284. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3-4n}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A, B i C że
$$\frac{1}{n^3-4n}=\frac{1}{(n-2)\cdot n\cdot(n+2)}=\frac{A}{n-2}+\frac{B}{n}+\frac{C}{n+2}\,.$$
Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(n-2)\cdot n\cdot(n+2)$ otrzymujemy
$$1=A\cdot n\cdot(n+2)+B\cdot(n-2)\cdot(n+2)+C\cdot(n-2)\cdot n\,.$$
Dla $n=2$ otrzymujemy $A=1/8$, dla $n=0$ dostajemy $B=-1/4$, natomiast przyjęcie $n=-2$ daje $C=1/8$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem
$$S_N=\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n^3-4n}=\frac{1}{8}\cdot\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{6}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{7}+\frac{1}{9}\right)+\ldots\right.$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{N-6}-\frac{2}{N-4}+\frac{1}{N-2}\right)+\left(\frac{1}{N-5}-\frac{2}{N-3}+\frac{1}{N-1}\right)+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{N-4}-\frac{2}{N-2}+\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{2}{N-1}+\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{2}{N}+\frac{1}{N+2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do

$$\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{12+6-4-3}{12}=\frac{11}{96}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą 11/96.

Uwaga: Nieco prostsze rachunkowo rozwiązanie może być oparte na tożsamości

$$\frac{1}{(n-2)\cdot n\cdot(n+2)}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{(n-2)\cdot n}-\frac{1}{n\cdot(n+2)}\right),$$

pod warunkiem, że na nią jakoś wpadniemy.

285. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+4)}.$$

Rozwiązanie:

Rozłóżmy na ułamki proste wyraz ogólny szeregu:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+4)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+4},$$

$$1=A\cdot(n+1)\cdot(n+4)+B\cdot n\cdot(n+4)+C\cdot n\cdot(n+1),$$

$$\text{dla } n=0: \quad 1=4A, \quad A=1/4,$$

$$\text{dla } n=-1: \quad 1=-3B, \quad B=-1/4,$$

$$\text{dla } n=-4: \quad 1=12C, \quad C=1/12.$$

Zatem

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+4)}=\frac{1/4}{n}-\frac{1/3}{n+1}+\frac{1/12}{n+4}.$$

W konsekwencji sumy częściowe danego szeregu wyrażają się wzorem

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+4)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1/4}{n}-\frac{1/4}{n+1}+\frac{1/12}{n+4}\right)=$$

$$=\left(\frac{1/4}{1}-\frac{1/3}{2}+\frac{1/12}{5}\right)+\left(\frac{1/4}{2}-\frac{1/3}{3}+\frac{1/12}{6}\right)+\left(\frac{1/4}{3}-\frac{1/3}{4}+\frac{1/12}{7}\right)+$$

$$+\left(\frac{1/4}{4}-\frac{1/3}{5}+\frac{1/12}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1/4}{N-3}-\frac{1/3}{N-2}+\frac{1/12}{N+1}\right)+$$

$$+\left(\frac{1/4}{N-2}-\frac{1/3}{N-1}+\frac{1/12}{N+2}\right)+\left(\frac{1/4}{N-1}-\frac{1/3}{N}+\frac{1/12}{N+3}\right)+\left(\frac{1/4}{N}-\frac{1/3}{N+1}+\frac{1/12}{N+4}\right)=$$
$$=\frac{1/4}{1}-\frac{1/12}{2}-\frac{1/12}{3}-\frac{1/12}{4}-\frac{1/4}{N+1}+\frac{1/12}{N+2}+\frac{1/12}{N+3}+\frac{1/12}{N+4}=$$
$$=\frac{23}{144}-\frac{1/4}{N+1}+\frac{1/12}{N+2}+\frac{1/12}{N+3}+\frac{1/12}{N+4}\to\frac{23}{144}$$
przy $N\to\infty$.

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa $23/144$.

286. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{n+1}+(n+1)\cdot\sqrt{n}}\,.$$

Rozwiązanie:

Korzystając z równości
$$\frac{1}{n\cdot\sqrt{n+1}+(n+1)\cdot\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
przekształcamy N-tą sumę częściową danego szeregu:
$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\cdot\sqrt{n+1}+(n+1)\cdot\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{N-2}}-\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}-\frac{1}{\sqrt{N}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{N}}-\frac{1}{\sqrt{N+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{N+1}}\,,$$
co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do 1.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą 1.

Niech

$$a_n=\frac{120}{n(n+1)(n+2)} \qquad \text{dla} \qquad n\in\mathbb{N}\,.$$

Wiadomo, że wówczas szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 30.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

287. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n+a_{n+1}\right)=$ **40**

288. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n-a_{n+1}\right)=$ **20**

289. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_1\cdot a_n\right)=$ **600**

290. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_2\cdot a_n\right)=$ **150**

291. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2-a_{n+1}^2\right)=$ **400**

292. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2-a_{n+2}^2\right)=$ **425**

293. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2-a_{n+3}^2\right)=$ **429**

294. $\sum\limits_{\mathbf{n=2}}^{\infty} \left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ **31**

295. $\sum\limits_{\mathbf{n=3}}^{\infty} \left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ **3**

296. $\sum\limits_{\mathbf{n=4}}^{\infty} \left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ **1**

Niech

$$a_n = \frac{60}{n(n+1)} \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Wiadomo, że wówczas szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 60.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

297. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) =$ **90**

298. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) =$ **30**

299. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) =$ **1800**

300. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_2 \cdot a_n) =$ **600**

301. $\sum\limits_{\mathbf{n=3}}^{\infty} a_n =$ **20**

302. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^3 - a_{n+1}^3\right) =$ **27000**

303. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big((a_n - a_{n+1}) \cdot (a_n + a_{n+1})\Big) =$ **900**

304. $\sum\limits_{\mathbf{n=3}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ **31**

305. $\sum\limits_{\mathbf{n=4}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ **7**

306. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_n^2 + 1600} - \sqrt{a_{n+1}^2 + 1600}\,\right) =$ **10**

W każdym z poniższych 5 zadań podaj w postaci uproszczonej sumę szeregu.

307. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)=\mathbf{0}$

308. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+2]{n+2}\right)=\sqrt{\mathbf{2}}-\mathbf{1}$

309. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+3]{n+3}\right)=\sqrt{\mathbf{2}}+\sqrt[3]{\mathbf{3}}-\mathbf{2}$

310. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)=\sqrt{\mathbf{2}}-\mathbf{1}$

311. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+2]{n+2}\right)=\sqrt{\mathbf{2}}+\sqrt[3]{\mathbf{3}}-\mathbf{2}$

Niech $a_n=\dfrac{120}{n(n+2)}$ dla $n\in\mathbb{N}$. Wiadomo, że wówczas szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 90.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

312. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=$ **140**

313. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=$ **40**

314. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+1}^2\right)=$ **1600**

315. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+2}^2\right)=$ **1825**

316. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+3}^2\right)=$ **1889**

317. $\sum\limits_{\mathbf{n=4}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ **31**

318. $\sum\limits_{\mathbf{n=6}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ $\mathbf{4\sqrt{2}-1}$

319. $\sum\limits_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ **1**

320. $\sum\limits_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(3^{a_n}-3^{a_{n+1}}\right)=$ **2**

321. $\sum\limits_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(4^{a_n}-4^{a_{n+1}}\right)=$ **3**