264. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{8n^k+\sqrt{n}-4}}{8n^4-3n^3+5}$$

w zależności od parametru naturalnego k.

Rozwiązanie:

Szacujemy dany w zadaniu szereg od góry

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{8n^k+\sqrt{n}-4}}{8n^4-3n^3+5}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{8n^k+n^k-0}}{8n^4-3n^4+0}=\frac{3}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4-k/2}}\,.$$

Ostatni szereg jest zbieżny, gdy $4-k/2>1$, czyli $k<6$. Zatem na mocy kryterium porównawczego wyjściowy szereg jest zbieżny dla $k\leqslant 5$.

Szacowanie z dołu prowadzi do

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{8n^k+\sqrt{n}-4}}{8n^4-3n^3+5}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{8n^k+0-4n^k}}{8n^4-0+5n^4}=\frac{2}{13}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4-k/2}}\,.$$

Ostatni szereg jest rozbieżny, gdy $4-k/2\leqslant 1$, czyli $k\geqslant 6$. Zatem na mocy kryterium porównawczego wyjściowy szereg jest rozbieżny dla $k\geqslant 6$.

Odpowiedź: Szereg jest zbieżny dla $k\leqslant 5$, a rozbieżny dla $k\geqslant 6$.

265. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^k+1}}{n^7+1}\qquad\text{oraz}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^{k+1}+1}}{n^7+1}$$

dla tak dobranej wartości parametru naturalnego k, że dokładnie jeden z tych szeregów jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Przyjmiemy $k=11$ i zastosujemy kryterium porównawcze, szacując pierwszy szereg od góry, a drugi od dołu.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^{11}+1}}{n^7+1}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^{11}+3n^{11}}}{n^7+0}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}<+\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^{12}+1}}{n^7+1}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^{12}+0}}{n^7+n^7}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$$

Odpowiedź: Dla $k=11$ pierwszy szereg jest zbieżny, a drugi rozbieżny.

266. Ciąg (a_n) o wyrazach rzeczywistych spełnia dla każdej liczby naturalnej n nierówność

$$|a_n-a_{n+1}|<\frac{1}{n}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy stąd wynika, że ciąg (a_n) jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Nie wynika.

Rozważmy bowiem ciąg sum częściowych szeregu harmonicznego

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,.$$

Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$|a_n-a_{n+1}|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}\,,$$

a przy tym ciąg (a_n) jest rozbieżny.

267. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=9\,.$$

Rozwiązanie:

Niech q będzie ilorazem szeregu geometrycznego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Wówczas dodatniość wyrazów i zbieżność szeregu pociągają nierówności $a_1>0$ oraz $0<q<1$, a wyrazy szeregu wyrażają się wzorem $a_n=a_1q^{n-1}$. Ponadto ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-q}\,.$$

Ponieważ wyrazy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$$

wyrażają się wzorem

$$a_n^2=a_1^2\cdot\left(q^2\right)^{n-1}\,,$$

szereg ten jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1^2 i ilorazie q^2. Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{a_1^2}{1-q^2}\,.$$

Zatem warunki podane w treści zadania przyjmują postać

$$\frac{a_1}{1-q}=\frac{a_1^2}{1-q^2}=9\,,$$

co po przekształceniu prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a_1 &= 9\cdot(1-q)\\ a_1^2 &= 9\cdot(1-q)\cdot(1+q)\end{cases}$$

Podstawienie $a_1=9\cdot(1-q)$ do drugiego równania daje

$$81\cdot(1-q)^2=9\cdot(1-q)\cdot(1+q)\,,$$

skąd po uwzględnieniu $q\neq1$ i podzieleniu obustronnie przez $9\cdot(1-q)$ otrzymujemy kolejno

$$9-9q=q+1\,,$$

$$q=4/5,\qquad a_1=9/5\,.$$

Odpowiedź: Jedynym szeregiem geometrycznym spełniającym warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9\cdot 4^{n-1}}{5^n}\,.$$

268. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 8\,.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c>0$ oraz $0<q<1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 \left(q^2\right)^{n-1} = \frac{c^2}{1-q^2}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q} & = & 4 \\ \dfrac{c^2}{1-q^2} & = & 8\,, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} c & = & 4(1-q) \\ c^2 & = & 8\,(1-q^2)\,. \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$c = 2+2q\,,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania daje kolejno

$$2+2q = 4-4q\,,$$

$$6q = 2\,,$$

$$q = \frac{1}{3}\,,$$

skąd

$$c = 2+2q = 2+\frac{2}{3} = \frac{8}{3}\,.$$

Otrzymane rozwiązanie $q=1/3$, $c=8/3$ prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{8}{3^n}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{3^n}.$$

269. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = aq^{n-1}$, pamiętając, aby $a > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a(-q)^{n-1} = \frac{a}{1+q},$$

co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a = 3(1-q) \\ a = 1+q \end{cases}$$

mającego rozwiązanie $q = 1/2$, $a = 3/2$.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}.$$

270. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^2 = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Dla podanego przykładu wyznaczyć wartości sum szeregów występujących w powyższym równaniu i sprawdzić, że jest ono spełnione.

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = c \cdot q^{n-1}$, pamiętając, aby $c > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot q^{n-1} = \frac{c}{1-q},$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 \cdot \left(q^2\right)^{n-1} = \frac{c^2}{1-q^2},$$

co w połączeniu z warunkiem podanym w treści zadania prowadzi do równania

$$\left(\frac{c}{1-q}\right)^2 = 2 \cdot \frac{c^2}{1-q^2},$$

czyli

$$\frac{c^2}{(1-q)^2}=\frac{2\cdot c^2}{1-q^2}\,.$$

Przekształcanie powyższego równania prowadzi kolejno do:

$$\frac{c^2}{(1-q)^2}=\frac{2\cdot c^2}{(1-q)(1+q)}\,,$$

$$1+q=2\cdot(1-q)\,,$$

$$1+q=2-2q\,,$$

$$3q=1\,,$$

$$q=1/3\,.$$

Widzimy więc, że w przypadku szeregu geometrycznego, podany w zadaniu warunek jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy iloraz szeregu jest równy 1/3.

Możemy więc przyjąć

$$a_n=\frac{1}{3^n}\,,$$

co prowadzi do

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n}=\frac{1}{8}\,.$$

Wówczas podane w treści zadania równanie przyjmuje postać

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=2\cdot\frac{1}{8}\,,$$

jest więc spełnione – każda z jego stron jest równa 1/4.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\,.$$

271. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}=6\,.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n=cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c>0$ oraz $0<q<1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}cq^{n-1}=\frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 q \left(q^2\right)^{n-1} = \frac{c^2 q}{1-q^2} \,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q} = 6 \\ \dfrac{c^2 q}{1-q^2} = 6 \,, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} c = 6(1-q) \\ c^2 q = 6\,(1-q^2) \,. \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$cq = 1+q \,,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania przemnożonego przez q daje kolejno

$$1+q = 6q - 6q^2 \,,$$

$$6q^2 - 5q + 1 = 0 \,,$$

$$q = \frac{5 \pm 1}{12} \,,$$

skąd

$$q = 1/3, \qquad c = 4$$

lub

$$q = 1/2, \qquad c = 3 \,.$$

Otrzymane rozwiązania prowadzą odpowiednio do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{4}{3^{n-1}} \quad \text{oraz} \quad a_n = cq^{n-1} = \frac{3}{2^{n-1}} \,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}} \,.$$

272. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + a_{n+1}\right)^2 = \frac{4}{3} \,.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})^2=\sum_{n=1}^{\infty}c^2(1+q)^2\cdot\left(q^2\right)^{n-1}=\frac{c^2\cdot(1+q)^2}{1-q^2}\,,$$
co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań
$$\begin{cases}\dfrac{c}{1-q}=\dfrac{4}{3}\\ \dfrac{c^2\cdot(1+q)^2}{1-q^2}=\dfrac{4}{3}\,,\end{cases}$$
czyli
$$\begin{cases}3c=4(1-q)\\ 3c^2\cdot(1+q)=4\,(1-q)\;.\end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy
$$c\cdot(1+q)=1\,,$$
co po podstawieniu do pierwszego równania przemnożonego przez $1+q$ daje kolejno
$$3=4\cdot\left(1-q^2\right)\,,$$
$$3/4=1-q^2\,,$$
$$q^2=1/4\,,$$
skąd
$$q=1/2,\qquad c=1/(1+q)=2/3\,.$$

Otrzymane rozwiązanie prowadzi do
$$a_n=cq^{n-1}=\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}\,.$$

273. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=15\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n^4\,.$$

Rozwiązanie:

Niech q będzie ilorazem szeregu geometrycznego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Wówczas dodatniość wyrazów i zbieżność szeregu pociągają nierówności $a_1>0$ oraz $0<q<1$, a wyrazy szeregu wyrażają się wzorem $a_n=a_1q^{n-1}$. Ponadto ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-q}\,.$$

Ponieważ wyrazy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$$

wyrażają się odpowiednio wzorami

$$a_n^2 = a_1^2 \cdot \left(q^2\right)^{n-1} \quad \text{oraz} \quad a_n^4 = a_1^4 \cdot \left(q^4\right)^{n-1},$$

szeregi te są szeregami geometrycznymi o ilorazach odpowiednio q^2 oraz q^4. Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{a_1^2}{1-q^2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \frac{a_1^4}{1-q^4}.$$

Zatem warunek podany w treści zadania przyjmuje postać

$$\frac{a_1}{1-q} = 3 \cdot \frac{a_1^2}{1-q^2} = 15 \cdot \frac{a_1^4}{1-q^4},$$

co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{1-q} & = & 3 \cdot \dfrac{a_1^2}{1-q^2} \\ \dfrac{a_1^2}{1-q^2} & = & 5 \cdot \dfrac{a_1^4}{1-q^4} \end{cases}$$

równoważnego (po uproszczeniu) układowi

$$\begin{cases} 1+q & = & 3 \cdot a_1 \\ 1+q^2 & = & 5 \cdot a_1^2 \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $q=3a_1-1$, co po podstawieniu do równania drugiego daje

$$1+(3a_1-1)^2 = 5a_1^2,$$

czyli kolejno

$$1+9a_1^2-6a_1+1 = 5a_1^2,$$

$$4a_1^2-6a_1+2=0,$$

$$2a_1^2-3a_1+1=0,$$

co jest spełnione przez $a_1=1$ oraz $a_1=1/2$, prowadzące odpowiednio do $q=2$ oraz $q=1/2$. Pierwsze z tych rozwiązań odrzucamy, gdyż nie spełnia ono nierówności $q<1$.

Odpowiedź: Jedynym szeregiem geometrycznym spełniającym warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

274. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 20, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = 5.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = c \cdot q^{n-1}$, pamiętając, aby $c > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot q^{n-1} = \frac{c}{1-q}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{2} \cdot \left(\frac{q}{2}\right)^{n-1} = \frac{c/2}{1-q/2} = \frac{c}{2-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{3} \cdot \left(\frac{q}{3}\right)^{n-1} = \frac{c/3}{1-q/3} = \frac{c}{3-q}\,,$$

co w połączeniu z warunkami podanymi w treści zadania prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q} = 20 \\ \dfrac{c}{2-q} = 8 \\ \dfrac{c}{3-q} = 5 \end{cases}$$

Po przemnożeniu równań przez mianowniki występujące po lewej stronie otrzymujemy

$$\begin{cases} c = 20 - 20q \\ c = 16 - 8q \\ c = 15 - 5q \end{cases}$$

Odjęcie stronami od pierwszych dwóch równań trzeciego równania daje

$$\begin{cases} 0 = 5 - 15q \\ 0 = 1 - 3q \\ c = 15 - 5q \end{cases}$$

Stąd dostajemy rozwiązanie $q = 1/3$, $c = 40/3$.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{3^n}\,.$$

275. Dany jest zbieżny szereg geometryczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie S. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = T\,.$$

Wyznaczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ w zależności od S i T.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z następującego wzoru na sumę zbieżnego szeregu geometrycznego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o ilorazie q, gdzie $|q| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}\,.$$

Jeżeli dany w zadaniu szereg geometryczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ma iloraz q, to dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. W konsekwencji

$$(-1)^n a_n = (-1)^n \cdot a_1 \cdot q^{n-1} = (-a_1) \cdot (-q)^{n-1} .$$

Zatem szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $-a_1$ i ilorazie $-q$. Mamy więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \frac{-a_1}{1-(-q)} = \frac{-a_1}{1+q} .$$

Podobnie

$$a_n^2 = \left(a_1 \cdot q^{n-1}\right)^2 = \left(a_1^2\right) \cdot \left(q^2\right)^{n-1} ,$$

skąd wynika, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1^2 i ilorazie q^2. Po uwzględnieniu założeń

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q} = S \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \frac{-a_1}{1+q} = T$$

otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1}{1-q} \cdot \frac{a_1}{1+q} = -\frac{a_1}{1-q} \cdot \frac{-a_1}{1+q} = -ST .$$

Odpowiedź: Suma szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest równa $-ST$.

276. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyraz a_n jest dodatni, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 13 .$$

Rozwiązanie:

Gdyby szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ miał wszystkie wyrazy nieujemne, zachodziłaby równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| ,$$

co przeczy warunkom zadania. Stąd wynika, że wyraz a_1 jest ujemny jako jedyny, którego dodatniość nie jest wymuszona założeniami podanymi w treści zadania.

Niech $S = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + S$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = -a_1 + S ,$$

skąd

$$\begin{cases} a_1+S=1 \\ -a_1+S=13\,, \end{cases}$$

co prowadzi do $a_1=-6$ oraz $S=7$.

To pozwala opisać wszystkie szeregi spełniające warunki zadania: pierwszy wyraz musi być równy -6, a pozostałe wyrazy muszą być dodanie i mieć sumę 7. Jednak polecenie zadania wymaga podania przykładu, więc w rozwiązaniu musimy wskazać jakiś konkretny szereg.

Wychodząc od równości

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}$$

otrzymujemy

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{14}{2^n}=7\,,$$

co pozwala przyjąć $a_1=-6$ oraz $a_n=\dfrac{14}{2^n}$ dla $n\geqslant 2$.

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,,$$

gdzie

$$a_1=-6 \quad \text{oraz} \quad a_n=\frac{14}{2^n} \;\text{ dla }\; n\geqslant 2\,.$$

277. Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach rzeczywistych, że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^4$ są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^4\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (dla miłośników bezmyślnych rachunków)

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu rozważmy szereg geometryczny o pierwszym wyrazie $c\neq 0$ i ilorazie $q\neq 0$, pamiętając, aby $|q|<1$. Wówczas $a_n=cq^{n-1}$, a ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}cq^{n-1}=\frac{c}{1-q}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}c^2\left(q^2\right)^{n-1}=\frac{c^2}{1-q^2}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^4=\sum_{n=1}^{\infty}c^4\left(q^4\right)^{n-1}=\frac{c^4}{1-q^4}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q} & = & 5 \\ \dfrac{c^2}{1-q^2} & = & \dfrac{c^4}{1-q^4}\,, \end{cases}$$

co kolejno prowadzi do:

$$\begin{cases} c & = & 5-5q \\ \dfrac{c^2}{1-q^2} & = & \dfrac{c^2\cdot c^2}{(1-q^2)\cdot(1+q^2)}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c & = & 5-5q \\ 1 & = & \dfrac{c^2}{1+q^2}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c & = & 5-5q \\ 1+q^2 & = & c^2\,, \end{cases}$$

Pierwsze równanie daje zależność c od q. Podstawiając tę zależność do drugiego równania otrzymujemy kolejno:

$$q^2+1=25q^2-50q+25\,,$$

$$24q^2-50q+24=0\,,$$

$$12q^2-25q+12=0\,,$$

$$q=\frac{25\pm\sqrt{25^2-4\cdot12\cdot12}}{24}=\frac{25\pm\sqrt{25^2-24^2}}{24}=\frac{25\pm\sqrt{(25-24)\cdot(25+24)}}{24}=$$

$$=\frac{25\pm\sqrt{49}}{24}=\frac{25\pm7}{24}\,.$$

Uwzględniając nierówność $|q|<1$ odrzucamy rozwiązanie $q=32/24=4/3>1$ i rozpatrujemy $q=18/24=3/4$. Ostatecznie

$$q=3/4\,,\qquad c=5/4\,.$$

Otrzymane rozwiązanie prowadzi do

$$a_n=cq^{n-1}=\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\frac{5\cdot3^{n-1}}{4^n}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot3^{n-1}}{4^n}\,.$$

Sposób II (dla myślących i uważnie czytających założenia)

Przyjmijmy $a_n=1$ dla $n\leqslant5$ oraz $a_n=0$ dla $n\geqslant6$. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej k otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^k=5\,,$$

skąd wynika, że podany szereg spełnia warunki zadania.