180. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} |a_n - 1| < \frac{1}{n}\,.$$

W każdym z zadań **180.1-180.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

180.1. $\sup\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{2}$

180.2. $\inf\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{0}$

180.3. $\sup\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{3/2}$

180.4. $\inf\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{1/2}$

180.5. $\sup\{a_2 - a_3 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{5/6}$

180.6. $\inf\{a_2 - a_3 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{-5/6}$

180.7. $\sup\{a_3 - a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{1/2}$

180.8. $\inf\{a_3 - a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{-1/2}$

180.9. $\sup\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{4}$

180.10. $\inf\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{2}$

181. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \left|a_n - \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{n}\,.$$

W każdym z zadań **181.1-181.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

181.1. $\sup\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{2}$

181.2. $\inf\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{0}$

181.3. $\sup\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{1}$

181.4. $\inf\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{0}$

181.5. $\sup\{a_2 - a_3 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{1}$

181.6. $\inf\{a_2 - a_3 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{-2/3}$

181.7. $\sup\{a_3 - a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{2/3}$

181.8. $\inf\{a_3 - a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{-1/3}$

181.9. $\sup\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{2}$

181.10. $\inf\{a_2 + a_3 + a_6 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{0}$

182. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów **zbieżnych** (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} |a_n - 6| < \frac{n+1}{n} .$$

W każdym z zadań **182.1-182.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

182.1. $\sup\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{8}$

182.2. $\inf\{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{4}$

182.3. $\sup\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{7,5 = 15/2 = 7\frac{1}{2}}$

182.4. $\inf\{a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{4,5 = 9/2 = 4\frac{1}{2}}$

182.5. $\sup\{a_1 - a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{3,5 = 7/2 = 3\frac{1}{2}}$

182.6. $\inf\{a_1 - a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\} = \mathbf{-3,5 = -7/2 = -3\frac{1}{2}}$

182.7. $\sup\left\{\lim\limits_{n\to\infty} a_n : (a_n)\in\mathbb{T}\right\} = \mathbf{7}$

182.8. $\inf\left\{\lim\limits_{n\to\infty} a_n : (a_n)\in\mathbb{T}\right\} = \mathbf{5}$

182.9. $\sup\left\{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a_1) : (a_n)\in\mathbb{T}\right\} = \mathbf{3}$

182.10. $\inf\left\{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a_1) : (a_n)\in\mathbb{T}\right\} = \mathbf{-3}$

183. W każdym z zadań **183.1-183.6** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} |a_n - a_{n+1}| < \frac{1}{n} .$$

183.1. $A = \{a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf A = \mathbf{-\infty}$ $\sup A = \mathbf{+\infty}$

183.2. $B = \{a_3 - a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf B = \mathbf{-3/2}$ $\sup B = \mathbf{3/2}$

183.3. $C = \{a_4 - a_2 : (a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf C = \mathbf{-5/6}$ $\sup C = \mathbf{5/6}$

183.4. $D = \{a_4 - a_1 : (a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf D = \mathbf{-11/6}$ $\sup D = \mathbf{11/6}$

183.5. $E = \left\{(a_3 - a_1)^2 : (a_n)\in\mathbb{T}\right\}$

$\inf E = \mathbf{0}$ $\sup E = \mathbf{9/4}$

183.6. $F = \left\{a_3^2 - a_1^2 : (a_n)\in\mathbb{T}\right\}$

$\inf F = \mathbf{-\infty}$ $\sup F = \mathbf{+\infty}$

184. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru
$$Z=\left\{\frac{mn}{4m^2+9n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Rozwiązanie zadania oprzemy na następujących spostrzeżeniach:

1° Wszystkie elementy zbioru Z są dodatnie.

2° Istnieje ciąg o wyrazach ze zbioru Z zbieżny do zera.
Dla dowodu tego spostrzeżenia wystarczy przyjąć $m=1$ w wyrażeniu
$$\frac{mn}{4m^2+9n^2}\,. \qquad (\heartsuit)$$
Otrzymamy wówczas
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4+9n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\cdot n^{-1}+9n}=0\,.$$

3° Liczba $1/12$ jest elementem zbioru Z.
Aby to zobaczyć, wystaczy podstawić $m=3$ i $n=2$ w $(\heartsuit)$.

4° Każdy element zbioru Z jest nie większy od $1/12$.
Istotnie, z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb $4m^2$ i $9n^2$ otrzymujemy
$$\sqrt{4m^2\cdot 9n^2}\leqslant\frac{4m^2+9n^2}{2}\,,$$
co łatwo przekształcamy do postaci
$$\frac{mn}{4m^2+9n^2}\leqslant\frac{1}{12}\,.$$

Na podstawie spostrzeżeń **1°** i **2°** stwierdzamy, że $\inf Z=0$, a ze spostrzeżeń **3°** i **4°** wynika $\sup Z=1/12$.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 0, a kres górny 1/12.

185. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru
$$Z=\left\{\frac{kmn}{8k^3+27m^3+125n^3}:k,m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowanej do liczb $8k^3$, $27m^3$, $125n^3$ otrzymujemy
$$\sqrt[3]{8k^3\cdot 27m^3\cdot 125n^3}\leqslant\frac{8k^3+27m^3+125n^3}{3}\,,$$
czyli
$$\frac{kmn}{8k^3+27m^3+125n^3}\leqslant\frac{1}{90}\,.$$

Zatem liczba $1/90$ jest ograniczeniem górnym zbioru Z. Wykażemy, że jest to ograniczenie najmniejsze. W tym celu przyjmijmy $k=15$, $m=10$ oraz $n=6$. Wówczas

$$\frac{kmn}{8k^3+27m^3+125n^3}=\frac{900}{27000+27000+27000}=\frac{1}{90}$$

jest elementem zbioru Z.

Odpowiedź: Kres górny zbioru Z jest równy $1/90$.

186. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\sqrt{n^2+5n+3}-n:\,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\sqrt{n^2+5n+3}-n=\sqrt{n^2+5n+3}-\left(n+\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}=\frac{n^2+5n+3-\left(n+\frac{5}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2+5n+3}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}=$$

$$=\frac{n^2+5n+3-n^2-5n-\frac{25}{4}}{\sqrt{n^2+5n+3}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}=-\frac{13/4}{\sqrt{n^2+5n+3}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}.$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie rośnie wraz z n, a przy $n\to\infty$ dąży do $5/2$.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu rosnącym pierwszy wyraz (tu równy 2) jest najmniejszy, a kresem górnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 2, a kres górny $5/2$.

187. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\sqrt{n^2+5n+10}-n:\,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\sqrt{n^2+5n+10}-n=\sqrt{n^2+5n+10}-\left(n+\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}=\frac{n^2+5n+10-\left(n+\frac{5}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2+5n+10}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}=$$

$$=\frac{n^2+5n+10-n^2-5n-\frac{25}{4}}{\sqrt{n^2+5n+10}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}=\frac{15/4}{\sqrt{n^2+5n+10}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}.$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie maleje wraz z n, a przy $n\to\infty$ dąży do $5/2$.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu malejącym pierwszy wyraz (tu równy 3) jest największy, a kresem dolnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $5/2$, a kres górny 3.

188. Wyznaczyć (wraz z uzasadnieniem) kresy zbioru
$$\left\{\frac{1}{5^m-3^n} : m,n\in\mathbb{N}\right\} .$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=5^m-3^n>0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k. Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia i parzysta, musi zachodzić $k\geqslant 2$. Zauważmy przy tym, że dla $m=n=1$ w istocie $k=2$. Zatem liczba $1/2$ jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=5^m-3^n<0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k. Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna i parzysta, musi zachodzić $k\leqslant -2$. Zauważmy przy tym, że dla $m=2$, $n=3$ w istocie $k=25-27=-2$. Zatem liczba $-1/2$ jest najmniejszym elementem zbioru.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $-1/2$, a kres górny $1/2$.

189. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru
$$\left\{\frac{1}{m^2-3n^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\} .$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=m^2-3n^2>0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k. Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia, musi zachodzić $k\geqslant 1$. Zauważmy przy tym, że dla $m=2$ i $n=1$ w istocie $k=1$. Zatem liczba 1 jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=m^2-3n^2<0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k, czyli dla ujemnej liczby k o najmniejszym module. Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna, a przy tym $k\not\equiv 2\ (\pmod 3)$, musi zachodzić $k\neq -1$. W konsekwencji $k\leqslant -2$. Zauważmy ponadto, że dla $m=n=1$ otrzymujemy $k=-2$. Zatem liczba $-1/2$ jest najmniejszym elementem zbioru.

W rozwiązaniu korzystamy z następującego faktu: *Kwadrat liczby całkowitej nigdy nie daje przy dzieleniu przez 3 reszty 2.* Na tej właśnie podstawie wnioskujemy, że
$$k=m^2-3n^2\equiv m^2\not\equiv 2\ (\pmod 3)\,.$$

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $-1/2$, a kres górny 1.

190. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru
$$\left\{\frac{1}{m^2-7n^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\} .$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=m^2-7n^2>0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k. Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia, musi zachodzić $k \geqslant 1$. Zauważmy przy tym, że dla $m=8$ i $n=3$ w istocie $k=1$. Zatem liczba 1 jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=m^2-7n^2<0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k, czyli dla ujemnej liczby k o najmniejszym module. Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna, a przy tym $k \not\equiv 6 \pmod 7$ oraz $k \not\equiv 5 \pmod 7$, musi zachodzić $k \neq -1$ oraz $k \neq -2$. W konsekwencji $k \leqslant -3$. Zauważmy ponadto, że dla $m=2$ i $n=1$ otrzymujemy $k=-3$. Zatem liczba –1/3 jest najmniejszym elementem zbioru.

W rozwiązaniu korzystamy z następującego faktu: *Kwadrat liczby całkowitej nigdy nie daje przy dzieleniu przez 7 reszty 3, 5 ani 6.* Na tej właśnie podstawie wnioskujemy, że

$$k=m^2-7n^2 \equiv m^2 \not\equiv 5 \pmod 7$$

oraz

$$k=m^2-7n^2 \equiv m^2 \not\equiv 6 \pmod 7 .$$

Dowód powyższego faktu sprowadza się do następujących tożsamości:

$$(7t)^2=7\cdot\left(7t^2\right)+0 ,$$

$$(7t\pm1)^2=7\cdot\left(7t^2\pm2t\right)+1 ,$$

$$(7t\pm2)^2=7\cdot\left(7t^2\pm4t\right)+4 ,$$

$$(7t\pm3)^2=7\cdot\left(7t^2\pm6t+1\right)+2 .$$

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy –1/3, a kres górny 1.