Zadania do omówienia na ćwiczeniach stacjonarnych
w piątek 9.10.2020 i poniedziałek 12.10.2020.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

6. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ zachodzi równość

$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}=\binom{n+1}{5}.$$

7. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\frac{5}{651}+\frac{6}{1333}+\ldots+\frac{n-1}{(n-1)^4+(n-1)^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2-n+1)}.$$

8. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $k<n$ spełniających równanie

$$k\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{k+1}.$$

9. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4<\frac{n^2\cdot(n+1)^2\cdot(2n+1)}{10}.$$

10. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+1)\cdot\binom{2n}{n}\geqslant 4^n.$$

11. W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków $\geqslant$, $\leqslant$, a następnie dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+2)\cdot\binom{2n}{n}\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2^{2n-1}.$$

12. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+3)\cdot\binom{2n}{n}>7\cdot 4^{n-1}.$$

13. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+4)\cdot\binom{2n}{n}>2^{2n+1}.$$

14. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n\cdot\binom{2n}{n}^2\geqslant 4^{2n-1}\,.$$

15. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n}\leqslant 4^n\,.$$

16. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n}>\left(\frac{15}{4}\right)^n\,.$$

17. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{25}\cdot\binom{5n}{n}\cdot\binom{4n}{2n}<\sqrt[n]{27}\cdot\binom{5n}{2n}\cdot\binom{3n}{n}\,.$$

18. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{65}\cdot n\leqslant 2^n+2^{71}\,.$$

19. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{2n}\cdot\binom{2n}{n}>\binom{4n}{2n}\,.$$

20. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$3^{28}\cdot n\leqslant 3^n+3^{31}\,.$$

21. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n\cdot\binom{6n}{2n}\cdot\binom{4n}{n}<(n+1)\cdot\binom{6n}{3n}\cdot\binom{3n}{n}\,.$$

22. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}\geqslant\frac{3^{n-1}}{2}\,.$$

23. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n}\cdot\sqrt{15n+4}<9\cdot 4^{n-1}\,.$$