4. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n oraz każdych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1,a_2,\ldots,a_n$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\,.$$

Wybrane rachunki:

$T(n)\Rightarrow T(2n)$

$$\sqrt[2n]{a_1a_2\ldots a_{2n}}=\sqrt{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\cdot\sqrt[n]{a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{2n}}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\cdot\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}}{n}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}+\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}}{n}}{2}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2n}}{2n}\,.$$

$T(n)\Rightarrow T(n-1)$

$$a_n=\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}}$$

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_{n-1}\cdot\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}}}=$$

$$=(a_1a_2\ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}}=(a_1a_2\ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}=\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}}$$

$$a_n=\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}}=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

$$a_n\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

$$\frac{n-1}{n}\cdot a_n\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n}$$

$$a_n\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}$$

$$\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}$$