Kolokwium 2, 19.01.2021, godz. 13:20-14:00

Zadanie 1 (wersja 0)

Niech

$$f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $f(63)$ jest mniejsza czy większa od $f(64)-\frac{1}{32}$.

Wskazówka: Obie liczby są w przybliżeniu równe -0.34902, a różnią się o około $6.47\cdot 10^{-7}$. Nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+8}{4\cdot x^2}>0$$

dla $x<64$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64]$.

Zatem wykres funkcji f dla $x<64$ leży powyżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 64. Ponieważ $f'(64)=1/32$, dla $x<64$ zachodzi nierówność

$$f(x)>f(64)+\frac{1}{32}\cdot(x-64)$$

i w konsekwencji

$$f(63)>f(64)-\frac{1}{32}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(63)$ jest większa od $f(64)-\frac{1}{32}$.

Zadanie 1 (wersja 1)

Niech

$$f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $f(65)$ jest mniejsza czy większa od $f(64)+\dfrac{1}{32}$.

Wskazówka: Obie liczby są w przybliżeniu równe -0.28652, a różnią się o około $6.25\cdot 10^{-7}$. Nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+8}{4\cdot x^2}<0$$

dla $x>64$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[64,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>64$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 64. Ponieważ $f'(64)=1/32$, dla $x>64$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(64)+\frac{1}{32}\cdot(x-64)$$

i w konsekwencji

$$f(65)<f(64)+\frac{1}{32}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(65)$ jest mniejsza od $f(64)+\dfrac{1}{32}$.

Zadanie 1 (wersja 2)

Niech
$$f(x)=\sqrt{x}-5\cdot\ln x\,.$$
Rozstrzygnąć, czy liczba $f(399)$ jest mniejsza czy większa od $f(400)-\dfrac{1}{80}$.

Wskazówka: Obie liczby są w przybliżeniu równe -9.9698, a różnią się o około $6.53\cdot10^{-9}$. Nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy
$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{5}{x}$$
oraz
$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{5}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+20}{4\cdot x^2}>0$$
dla $x<400$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,400]$.

Zatem wykres funkcji f dla $x<400$ leży powyżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 400. Ponieważ $f'(400)=1/80$, dla $x<400$ zachodzi nierówność
$$f(x)>f(400)+\frac{1}{80}\cdot(x-400)$$
i w konsekwencji
$$f(399)>f(400)-\frac{1}{80}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(399)$ jest większa od $f(400)-\dfrac{1}{80}$.

Zadanie 1 (wersja 3)

Niech

$$f(x)=\sqrt{x}-5\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $f(401)$ jest mniejsza czy większa od $f(400)+\dfrac{1}{80}$.

Wskazówka: Obie liczby są w przybliżeniu równe -9.9448, a różnią się o około $6.49\cdot 10^{-9}$. Nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{5}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{5}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+20}{4\cdot x^2}<0$$

dla $x>400$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[400,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>400$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 400. Ponieważ $f'(400)=1/80$, dla $x>400$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(400)+\frac{1}{80}\cdot(x-400)$$

i w konsekwencji

$$f(401)<f(400)+\frac{1}{80}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(401)$ jest mniejsza od $f(400)+\dfrac{1}{80}$.

Zadanie 1 (wersja 4)

Niech
$$f(x)=\sqrt{x}-10\cdot\ln x\,.$$
Rozstrzygnąć, czy liczba $f(1599)$ jest mniejsza czy większa od $f(1600)-\dfrac{1}{160}$.

Wskazówka: Obie liczby są w przybliżeniu równe -33.784, a różnią się o około $2.04\cdot 10^{-10}$. Nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Rozwiązanie:
Różniczkując funkcję f otrzymujemy
$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{10}{x}$$
oraz
$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{10}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+40}{4\cdot x^2}>0$$
dla $x<1600$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,1600]$.

Zatem wykres funkcji f dla $x<1600$ leży powyżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 1600. Ponieważ $f'(1600)=1/160$, dla $x<1600$ zachodzi nierówność
$$f(x)>f(1600)+\frac{1}{160}\cdot(x-1600)$$
i w konsekwencji
$$f(1599)>f(1600)-\frac{1}{160}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(1599)$ jest większa od $f(1600)-\dfrac{1}{160}$.

Zadanie 1 (wersja 5)

Niech

$$f(x)=\sqrt{x}-10\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $f(1601)$ jest mniejsza czy większa od $f(1600)+\frac{1}{160}$.

Wskazówka: Obie liczby są w przybliżeniu równe -33.771, a różnią się o około $2.03\cdot10^{-10}$. Nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{10}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{10}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+40}{4\cdot x^2}<0$$

dla $x>1600$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[1600,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>1600$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 1600. Ponieważ $f'(1600)=1/160$, dla $x>1600$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(1600)+\frac{1}{160}\cdot(x-1600)$$

i w konsekwencji

$$f(1601)<f(1600)+\frac{1}{160}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(1601)$ jest mniejsza od $f(1600)+\frac{1}{160}$.

Zadanie 1 (wersja 6)

Niech

$$f(x)=\sqrt{x}-20\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $f(6399)$ jest mniejsza czy większa od $f(6400)-\frac{1}{320}$.

Wskazówka: Obie liczby są w przybliżeniu równe -95.284, a różnią się o około $6.36\cdot 10^{-12}$. Nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{20}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{20}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+80}{4\cdot x^2}>0$$

dla $x<6400$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,6400]$.

Zatem wykres funkcji f dla $x<6400$ leży powyżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 6400. Ponieważ $f'(6400)=1/320$, dla $x<6400$ zachodzi nierówność

$$f(x)>f(6400)+\frac{1}{320}\cdot(x-6400)$$

i w konsekwencji

$$f(6399)>f(6400)-\frac{1}{320}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(6399)$ jest większa od $f(6400)-\frac{1}{320}$.

Zadanie 1 (wersja 7)

Niech

$$f(x)=\sqrt{x}-20\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $f(6401)$ jest mniejsza czy większa od $f(6400)+\dfrac{1}{320}$.

Wskazówka: Obie liczby są w przybliżeniu równe -95.278, a różnią się o około $6.36\cdot10^{-12}$. Nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{20}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{20}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+80}{4\cdot x^2}<0$$

dla $x>6400$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[6400,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>6400$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 6400. Ponieważ $f'(6400)=1/320$, dla $x>6400$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(6400)+\frac{1}{320}\cdot(x-6400)$$

i w konsekwencji

$$f(6401)<f(6400)+\frac{1}{320}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(6401)$ jest mniejsza od $f(6400)+\dfrac{1}{320}$.

Zadanie 1 (wersja 8)

Niech

$$f(x)=\sqrt{x}-25\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $f(9999)$ jest mniejsza czy większa od $f(10000)-\frac{1}{400}$.

Wskazówka: Obie liczby są w przybliżeniu równe -130.26, a różnią się o około $2.08\cdot10^{-12}$. Nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{25}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{25}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+100}{4\cdot x^2}>0$$

dla $x<10000$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,10000]$.

Zatem wykres funkcji f dla $x<10000$ leży powyżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 10000. Ponieważ $f'(10000)=1/400$, dla $x<10000$ zachodzi nierówność

$$f(x)>f(10000)+\frac{1}{400}\cdot(x-10000)$$

i w konsekwencji

$$f(9999)>f(10000)-\frac{1}{400}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(9999)$ jest większa od $f(10000)-\frac{1}{400}$.

Zadanie 1 (wersja 9)

Niech

$$f(x)=\sqrt{x}-25\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $f(10001)$ jest mniejsza czy większa od $f(10000)+\dfrac{1}{400}$.

Wskazówka: Obie liczby są w przybliżeniu równe -130.26, a różnią się o około $2.08\cdot10^{-12}$. Nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{25}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{25}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+100}{4\cdot x^2}<0$$

dla $x>10000$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[10000,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>10000$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 10000. Ponieważ $f'(10000)=1/400$, dla $x>10000$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(10000)+\frac{1}{400}\cdot(x-10000)$$

i w konsekwencji

$$f(10001)<f(10000)+\frac{1}{400}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(10001)$ jest mniejsza od $f(10000)+\dfrac{1}{400}$.

Zadanie 1 (wersja 10)

Niech

$$f(x)=\sqrt{x}-50\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $f(39999)$ jest mniejsza czy większa od $f(40000)-\frac{1}{800}$.

Wskazówka: Obie liczby są w przybliżeniu równe -329.83, a różnią się o około $6.51\cdot10^{-14}$. Nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{50}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{50}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+200}{4\cdot x^2}>0$$

dla $x<40000$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,40000]$.

Zatem wykres funkcji f dla $x<40000$ leży powyżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 40000. Ponieważ $f'(40000)=1/800$, dla $x<40000$ zachodzi nierówność

$$f(x)>f(40000)+\frac{1}{800}\cdot(x-40000)$$

i w konsekwencji

$$f(39999)>f(40000)-\frac{1}{800}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(39999)$ jest większa od $f(40000)-\frac{1}{800}$.

Zadanie 1 (wersja 11)

Niech

$$f(x)=\sqrt{x}-50\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $f(40001)$ jest mniejsza czy większa od $f(40000)+\frac{1}{800}$.

Wskazówka: Obie liczby są w przybliżeniu równe -329.83, a różnią się o około $6.51\cdot10^{-14}$. Nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{50}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{50}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+200}{4\cdot x^2}<0$$

dla $x>40000$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[40000,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>40000$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 40000. Ponieważ $f'(40000)=1/800$, dla $x>40000$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(40000)+\frac{1}{800}\cdot(x-40000)$$

i w konsekwencji

$$f(40001)<f(40000)+\frac{1}{800}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(40001)$ jest mniejsza od $f(40000)+\frac{1}{800}$.

Zadanie 2 (wersja 0)

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=4\cdot\ln\left(x^2+1\right)-15\cdot\operatorname{arctg}x\,.$$

Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|\,,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y.

Zatem najmniejsza stała C, z którą prawdziwa jest nierówność podana w treści zadania, jest równa kresowi górnemu zbioru $\{|f'(x)|:x\in\mathbb{R}\}$.

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=\frac{8\cdot x-15}{x^2+1}\,.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8\cdot x-15}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8\cdot x^{-1}-15\cdot x^{-2}}{1+x^{-2}}=0\,.$$

Ponadto

$$f''(x)=\frac{8\cdot(x^2+1)-2\cdot x\cdot(8\cdot x-15)}{(x^2+1)^2}=\frac{-8\cdot x^2+30\cdot x+8}{(x^2+1)^2}\,.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się f'':

$$-8\cdot x^2+30\cdot x+8=0\,,$$

$$4\cdot x^2-15\cdot x-4=0\,,$$

$$x=\frac{15\pm\sqrt{289}}{8}=\frac{15\pm17}{8}\,,$$

skąd $x=4$ lub $x=-1/4$.

Wyliczamy wartości funkcji f' w miejscach zerowych jej pochodnej:

$$f'(4)=1$$

oraz

$$f'(-1/4)=-16\,.$$

Stąd wynika, że funkcja f' przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio -16 i 1, a zatem $C=16$.

Zadanie 2 (wersja 1)

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=6\cdot\ln\left(x^2+1\right)-5\cdot\operatorname{arctg} x\,.$$
Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość
$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|\,,$$
gdzie c leży pomiędzy x i y.

Zatem najmniejsza stała C, z którą prawdziwa jest nierówność podana w treści zadania, jest równa kresowi górnemu zbioru $\{|f'(x)|: x\in\mathbb{R}\}$.

Obliczamy pochodną funkcji f:
$$f'(x)=\frac{12\cdot x-5}{x^2+1}\,.$$
Zauważmy, że
$$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{12\cdot x-5}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{12\cdot x^{-1}-5\cdot x^{-2}}{1+x^{-2}}=0\,.$$
Ponadto
$$f''(x)=\frac{12\cdot(x^2+1)-2\cdot x\cdot(12\cdot x-5)}{(x^2+1)^2}=\frac{-12\cdot x^2+10\cdot x+12}{(x^2+1)^2}\,.$$
Rozwiązujemy równanie na zerowanie się f'':
$$-12\cdot x^2+10\cdot x+12=0\,,$$
$$6\cdot x^2-5\cdot x-6=0\,,$$
$$x=\frac{5\pm\sqrt{169}}{12}=\frac{5\pm 13}{12}\,,$$
skąd $x=3/2$ lub $x=-2/3$.

Wyliczamy wartości funkcji f' w miejscach zerowych jej pochodnej:
$$f'(3/2)=4$$
oraz
$$f'(-2/3)=-9\,.$$

Stąd wynika, że funkcja f' przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio -9 i 4, a zatem $C=9$.

Zadanie 2 (wersja 2)

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=3\cdot\ln\left(x^2+1\right)-8\cdot\operatorname{arctg} x\,.$$

Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|\,,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y.

Zatem najmniejsza stała C, z którą prawdziwa jest nierówność podana w treści zadania, jest równa kresowi górnemu zbioru $\{|f'(x)|: x\in\mathbb{R}\}$.

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=\frac{6\cdot x-8}{x^2+1}\,.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6\cdot x-8}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6\cdot x^{-1}-8\cdot x^{-2}}{1+x^{-2}}=0\,.$$

Ponadto

$$f''(x)=\frac{6\cdot(x^2+1)-2\cdot x\cdot(6\cdot x-8)}{(x^2+1)^2}=\frac{-6\cdot x^2+16\cdot x+6}{(x^2+1)^2}\,.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się f'':

$$-6\cdot x^2+16\cdot x+6=0\,,$$

$$3\cdot x^2-8\cdot x-3=0\,,$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{100}}{6}=\frac{8\pm10}{6}\,,$$

skąd $x=3$ lub $x=-1/3$.

Wyliczamy wartości funkcji f' w miejscach zerowych jej pochodnej:

$$f'(3)=1$$

oraz

$$f'(-1/3)=-9\,.$$

Stąd wynika, że funkcja f' przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio -9 i 1, a zatem $C=9$.

Zadanie 2 (wersja 3)

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=4\cdot\ln\left(x^2+1\right)-6\cdot\operatorname{arctg} x\,.$$
Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość
$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|\,,$$
gdzie c leży pomiędzy x i y.

Zatem najmniejsza stała C, z którą prawdziwa jest nierówność podana w treści zadania, jest równa kresowi górnemu zbioru $\{|f'(x)|: x\in\mathbb{R}\}$.

Obliczamy pochodną funkcji f:
$$f'(x)=\frac{8\cdot x-6}{x^2+1}\,.$$
Zauważmy, że
$$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8\cdot x-6}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8\cdot x^{-1}-6\cdot x^{-2}}{1+x^{-2}}=0\,.$$
Ponadto
$$f''(x)=\frac{8\cdot(x^2+1)-2\cdot x\cdot(8\cdot x-6)}{(x^2+1)^2}=\frac{-8\cdot x^2+12\cdot x+8}{(x^2+1)^2}\,.$$
Rozwiązujemy równanie na zerowanie się f'':
$$-8\cdot x^2+12\cdot x+8=0\,,$$
$$4\cdot x^2-6\cdot x-4=0\,,$$
$$x=\frac{6\pm\sqrt{100}}{8}=\frac{6\pm10}{8}\,,$$
skąd $x=2$ lub $x=-1/2$.

Wyliczamy wartości funkcji f' w miejscach zerowych jej pochodnej:
$$f'(2)=2$$
oraz
$$f'(-1/2)=-8\,.$$

Stąd wynika, że funkcja f' przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio -8 i 2, a zatem $C=8$.

Zadanie 2 (wersja 4)

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=10\cdot\ln\left(x^2+1\right)-21\cdot\operatorname{arctg} x\,.$$

Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|\,,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y.

Zatem najmniejsza stała C, z którą prawdziwa jest nierówność podana w treści zadania, jest równa kresowi górnemu zbioru $\{|f'(x)|: x\in\mathbb{R}\}$.

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=\frac{20\cdot x-21}{x^2+1}\,.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{20\cdot x-21}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{20\cdot x^{-1}-21\cdot x^{-2}}{1+x^{-2}}=0\,.$$

Ponadto

$$f''(x)=\frac{20\cdot(x^2+1)-2\cdot x\cdot(20\cdot x-21)}{(x^2+1)^2}=\frac{-20\cdot x^2+42\cdot x+20}{(x^2+1)^2}\,.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się f'':

$$-20\cdot x^2+42\cdot x+20=0\,,$$

$$10\cdot x^2-21\cdot x-10=0\,,$$

$$x=\frac{21\pm\sqrt{841}}{20}=\frac{21\pm 29}{20}\,,$$

skąd $x=5/2$ lub $x=-2/5$.

Wyliczamy wartości funkcji f' w miejscach zerowych jej pochodnej:

$$f'(5/2)=4$$

oraz

$$f'(-2/5)=-25\,.$$

Stąd wynika, że funkcja f' przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio -25 i 4, a zatem $C=25$.