Kolokwium 1, 1.12.2020, godz. 13:20-14:00

Zadanie 1 (wersja 0)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{37}\cdot n\leqslant 2^n+9\cdot 2^{39}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 36$.

Dla $n\leqslant 36$ zachodzą nierówności

$$2^{37}\cdot n\leqslant 2^{37}\cdot 36=2^{39}\cdot 9<2^n+9\cdot 2^{39}\,,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 37$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=37$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L=2^{37}\cdot 37\,,$$

$$P=2^{37}+9\cdot 2^{39}=2^{37}+9\cdot 4\cdot 2^{37}=37\cdot 2^{37}\,,$$

skąd $L=P$.

2° Niech $n\geqslant 37$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{37}\cdot n\leqslant 2^n+9\cdot 2^{39}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{37}\cdot (n+1)\leqslant 2^{n+1}+9\cdot 2^{39}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 37$ otrzymujemy

$$L=2^{37}\cdot (n+1)=2^{37}\cdot n+2^{37}\leqslant 2^n+9\cdot 2^{39}+2^{37}\leqslant 2^n+9\cdot 2^{39}+2^n=2^{n+1}+9\cdot 2^{39}=P\,,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 1 (wersja 1)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{45}\cdot n\leqslant 2^n+11\cdot 2^{47}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 44$.

Dla $n\leqslant 44$ zachodzą nierówności

$$2^{45}\cdot n\leqslant 2^{45}\cdot 44=2^{47}\cdot 11<2^n+11\cdot 2^{47}\,,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 45$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=45$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L=2^{45}\cdot 45\,,$$

$$P=2^{45}+11\cdot 2^{47}=2^{45}+11\cdot 4\cdot 2^{45}=45\cdot 2^{45}\,,$$

skąd $L=P$.

2° Niech $n\geqslant 45$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{45}\cdot n\leqslant 2^n+11\cdot 2^{47}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{45}\cdot (n+1)\leqslant 2^{n+1}+11\cdot 2^{47}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 45$ otrzymujemy

$$L=2^{45}\cdot (n+1)=2^{45}\cdot n+2^{45}\leqslant 2^n+11\cdot 2^{47}+2^{45}\leqslant 2^n+11\cdot 2^{47}+2^n=2^{n+1}+11\cdot 2^{47}=P\,,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 1 (wersja 2)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{53} \cdot n \leqslant 2^n + 13 \cdot 2^{55} .$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leqslant 52$.

Dla $n \leqslant 52$ zachodzą nierówności

$$2^{53} \cdot n \leqslant 2^{53} \cdot 52 = 2^{55} \cdot 13 < 2^n + 13 \cdot 2^{55} ,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geqslant 53$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 53$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L = 2^{53} \cdot 53 ,$$

$$P = 2^{53} + 13 \cdot 2^{55} = 2^{53} + 13 \cdot 4 \cdot 2^{53} = 53 \cdot 2^{53} ,$$

skąd $L = P$.

2° Niech $n \geqslant 53$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{53} \cdot n \leqslant 2^n + 13 \cdot 2^{55} .$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{53} \cdot (n+1) \leqslant 2^{n+1} + 13 \cdot 2^{55} .$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geqslant 53$ otrzymujemy

$$L = 2^{53} \cdot (n+1) = 2^{53} \cdot n + 2^{53} \leqslant 2^n + 13 \cdot 2^{55} + 2^{53} \leqslant 2^n + 13 \cdot 2^{55} + 2^n = 2^{n+1} + 13 \cdot 2^{55} = P ,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 1 (wersja 3)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{61}\cdot n\leqslant 2^n+15\cdot 2^{63}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 60$.

Dla $n\leqslant 60$ zachodzą nierówności

$$2^{61}\cdot n\leqslant 2^{61}\cdot 60=2^{63}\cdot 15<2^n+15\cdot 2^{63}\,,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 61$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=61$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L=2^{61}\cdot 61\,,$$

$$P=2^{61}+15\cdot 2^{63}=2^{61}+15\cdot 4\cdot 2^{61}=61\cdot 2^{61}\,,$$

skąd $L=P$.

2° Niech $n\geqslant 61$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{61}\cdot n\leqslant 2^n+15\cdot 2^{63}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{61}\cdot(n+1)\leqslant 2^{n+1}+15\cdot 2^{63}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 61$ otrzymujemy

$$L=2^{61}\cdot(n+1)=2^{61}\cdot n+2^{61}\leqslant 2^n+15\cdot 2^{63}+2^{61}\leqslant 2^n+15\cdot 2^{63}+2^n=2^{n+1}+15\cdot 2^{63}=P\,,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 2 (wersja 0)

Obliczyć granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{}{(n+2)^2}\right).$$

Uwaga: W ostatnim składniku sumy brakuje licznika. Jego uzupełnienie jest częścią zadania.

Rozwiązanie:

Patrząc na mianowniki widzimy, że suma składa się z $4n+4$ składników, wobec czego zadanie polega na obliczeniu granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{4n+4}{(n+2)^2}\right).$$

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{4n+4}{(n+2)^2}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(4n+4)}{n^2+0}=\frac{1+2+3+4+\ldots+(4n+4)}{n^2}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{4n+4}{(n+2)^2}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(4n+4)}{(n+2)^2}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$1+2+3+4+\ldots+(4n+4)=\frac{(4n+4)\cdot(4n+5)}{2}=(2n+2)\cdot(4n+5)\,.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{(2n+2)\cdot(4n+5)}{n^2}\to 8$$

przy $n\to\infty$. Podobnie

$$a_n=\frac{(2n+2)\cdot(4n+5)}{(n+2)^2}\to 8$$

przy $n \to \infty$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 8$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 8\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 8\,.$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma wartość 8.

Zadanie 2 (wersja 1)

Obliczyć granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{}{(n+3)^2}\right).$$

Uwaga: W ostatnim składniku sumy brakuje licznika. Jego uzupełnienie jest częścią zadania.

Rozwiązanie:

Patrząc na mianowniki widzimy, że suma składa się z $6n+9$ składników, wobec czego zadanie polega na obliczeniu granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{6n+9}{(n+3)^2}\right).$$

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{6n+9}{(n+3)^2}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(6n+9)}{n^2+0}=\frac{1+2+3+4+\ldots+(6n+9)}{n^2}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{6n+9}{(n+3)^2}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(6n+9)}{(n+3)^2}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$1+2+3+4+\ldots+(6n+9)=\frac{(6n+9)\cdot(6n+10)}{2}=(6n+9)\cdot(3n+5)\,.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{(6n+9)\cdot(3n+5)}{n^2}\to 18$$

przy $n\to\infty$. Podobnie

$$a_n=\frac{(6n+9)\cdot(3n+5)}{(n+3)^2}\to 18$$

przy $n \to \infty$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n ,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 18$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 18 ,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 18 .$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma wartość 18.

Zadanie 2 (wersja 2)

Obliczyć granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{}{(n+4)^2}\right).$$

Uwaga: W ostatnim składniku sumy brakuje licznika. Jego uzupełnienie jest częścią zadania.

Rozwiązanie:

Patrząc na mianowniki widzimy, że suma składa się z $8n+16$ składników, wobec czego zadanie polega na obliczeniu granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{8n+16}{(n+4)^2}\right).$$

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{8n+16}{(n+4)^2}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(8n+16)}{n^2+0}=\frac{1+2+3+4+\ldots+(8n+16)}{n^2}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{8n+16}{(n+4)^2}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(8n+16)}{(n+4)^2}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$1+2+3+4+\ldots+(8n+16)=\frac{(8n+16)\cdot(8n+17)}{2}=(4n+8)\cdot(8n+17)\,.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{(4n+8)\cdot(8n+17)}{n^2}\to 32$$

przy $n\to\infty$. Podobnie

$$a_n=\frac{(4n+8)\cdot(8n+17)}{(n+4)^2}\to 32$$

przy $n \to \infty$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 32$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 32 \,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 32 \,.$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma wartość 32.

Zadanie 2 (wersja 3)

Obliczyć granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{}{(n+5)^2}\right).$$

Uwaga: W ostatnim składniku sumy brakuje licznika. Jego uzupełnienie jest częścią zadania.

Rozwiązanie:

Patrząc na mianowniki widzimy, że suma składa się z $10n+25$ składników, wobec czego zadanie polega na obliczeniu granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{10n+25}{(n+5)^2}\right).$$

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{10n+25}{(n+5)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(10n+25)}{n^2+0}=\frac{1+2+3+4+\ldots+(10n+25)}{n^2}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{10n+25}{(n+5)^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(10n+25)}{(n+5)^2}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$1+2+3+4+\ldots+(10n+25)=\frac{(10n+25)\cdot(10n+26)}{2}=(10n+25)\cdot(5n+13)\,.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{(10n+25)\cdot(5n+13)}{n^2}\to 50$$

przy $n\to\infty$. Podobnie

$$a_n=\frac{(10n+25)\cdot(5n+13)}{(n+5)^2}\to 50$$

przy $n\to\infty$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 50$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 50\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 50\,.$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma wartość 50.

Zadanie 2 (wersja 4)

Obliczyć granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{}{(n+6)^2}\right).$$

Uwaga: W ostatnim składniku sumy brakuje licznika. Jego uzupełnienie jest częścią zadania.

Rozwiązanie:

Patrząc na mianowniki widzimy, że suma składa się z $12n+36$ składników, wobec czego zadanie polega na obliczeniu granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{12n+36}{(n+6)^2}\right).$$

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{12n+36}{(n+6)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(12n+36)}{n^2+0}=\frac{1+2+3+4+\ldots+(12n+36)}{n^2}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{12n+36}{(n+6)^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(12n+36)}{(n+6)^2}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$1+2+3+4+\ldots+(12n+36)=\frac{(12n+36)\cdot(12n+37)}{2}=(6n+18)\cdot(12n+37)\,.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{(6n+18)\cdot(12n+37)}{n^2}\to 72$$

przy $n\to\infty$. Podobnie

$$a_n=\frac{(6n+18)\cdot(12n+37)}{(n+6)^2}\to 72$$

przy $n\to\infty$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 72$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 72\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 72\,.$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma wartość 72.