Egzamin, 4.02.2021, godz. 11:20-12:20

Zadanie 1 (20 punktów) (wersja 0)

Dowieść, że liczba

$$\log_{(100/11)}\left(\frac{1000}{11}\right)$$

jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(100/11)}\left(\frac{1000}{11}\right)$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są większe od 1). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(100/11)}\left(\frac{1000}{11}\right)=\frac{m}{n}\,,$$

$$\left(\frac{100}{11}\right)^{m/n}=\frac{1000}{11}\,,$$

$$\left(\frac{100}{11}\right)^{m}=\left(\frac{1000}{11}\right)^{n}\,,$$

$$11^n\cdot 100^m=11^m\cdot 1000^n\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m}\cdot 5^{2m}\cdot 11^n=2^{3n}\cdot 5^{3n}\cdot 11^m\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m &= 3n\\ 2m &= 3n\\ n &= m\end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2m=3n>2n=2m\,,$$

czyli $2m>2m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(100/11)}\left(\frac{1000}{11}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(100/11)}\left(\frac{1000}{11}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga: Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:
• zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami dziesiątki,
lub
• występują wykładniki, o których nie wiadomo, czy są dodatnie.

Zadanie 1 (20 punktów) (wersja 1)

Dowieść, że liczba

$$\log_{(100/13)}\left(\frac{1000}{13}\right)$$

jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(100/13)}\left(\frac{1000}{13}\right)$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są większe od 1). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(100/13)}\left(\frac{1000}{13}\right)=\frac{m}{n},$$

$$\left(\frac{100}{13}\right)^{m/n}=\frac{1000}{13},$$

$$\left(\frac{100}{13}\right)^{m}=\left(\frac{1000}{13}\right)^{n},$$

$$13^n\cdot 100^m=13^m\cdot 1000^n.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m}\cdot 5^{2m}\cdot 13^n=2^{3n}\cdot 5^{3n}\cdot 13^m.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m = 3n \\ 2m = 3n \\ n = m \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2m=3n>2n=2m,$$

czyli $2m>2m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(100/13)}\left(\frac{1000}{13}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(100/13)}\left(\frac{1000}{13}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga: Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:

• zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami dziesiątki,

lub

• występują wykładniki, o których nie wiadomo, czy są dodatnie.

Zadanie 1 (20 punktów) (wersja 2)

Dowieść, że liczba

$$\log_{(100/17)}\left(\frac{1000}{17}\right)$$

jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(100/17)}\left(\frac{1000}{17}\right)$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są większe od 1). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(100/17)}\left(\frac{1000}{17}\right)=\frac{m}{n},$$

$$\left(\frac{100}{17}\right)^{m/n}=\frac{1000}{17},$$

$$\left(\frac{100}{17}\right)^{m}=\left(\frac{1000}{17}\right)^{n},$$

$$17^n\cdot 100^m=17^m\cdot 1000^n.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m}\cdot 5^{2m}\cdot 17^n=2^{3n}\cdot 5^{3n}\cdot 17^m.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m = 3n \\ 2m = 3n \\ n = m \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2m=3n>2n=2m,$$

czyli $2m>2m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(100/17)}\left(\frac{1000}{17}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(100/17)}\left(\frac{1000}{17}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga: Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:
• zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami dziesiątki,
lub
• występują wykładniki, o których nie wiadomo, czy są dodatnie.

Zadanie 1 (20 punktów) (wersja 3)

Dowieść, że liczba

$$\log_{(100/19)}\left(\frac{1000}{19}\right)$$

jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(100/19)}\left(\frac{1000}{19}\right)$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są większe od 1). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(100/19)}\left(\frac{1000}{19}\right)=\frac{m}{n}\,,$$

$$\left(\frac{100}{19}\right)^{m/n}=\frac{1000}{19}\,,$$

$$\left(\frac{100}{19}\right)^{m}=\left(\frac{1000}{19}\right)^{n}\,,$$

$$19^n\cdot 100^m=19^m\cdot 1000^n\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m}\cdot 5^{2m}\cdot 19^n=2^{3n}\cdot 5^{3n}\cdot 19^m\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2m & = & 3n \\ 2m & = & 3n \\ n & = & m \end{array}\right.$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2m=3n>2n=2m\,,$$

czyli $2m>2m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(100/19)}\left(\frac{1000}{19}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(100/19)}\left(\frac{1000}{19}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga: Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:
• zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami dziesiątki,
lub
• występują wykładniki, o których nie wiadomo, czy są dodatnie.

Zadanie 2 (20 punktów) (wersja 0)

Dobrać odpowiednią liczbę całkowitą k oraz liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\cdot n^k \leqslant \sqrt[4]{n^{12}+80n^2}-n^3 \leqslant 10C\cdot n^k\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, dwukrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^{12}+80n^2}-n^3=\frac{\sqrt{n^{12}+80n^2}-n^6}{\sqrt[4]{n^{12}+80n^2}+n^3}=\frac{80n^2}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^2}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^2}+n^6\right)}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\frac{80n^2}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^2}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^2}+n^6\right)}\geqslant\frac{80n^2}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^{12}}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^{12}}+n^6\right)}=$$

$$=\frac{80n^2}{4n^3\cdot 10n^6}=\frac{80n^2}{40n^9}=2\cdot n^{-7}$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{80n^2}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^2}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^2}+n^6\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{80n^2}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+0}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+0}+n^6\right)}=\frac{80n^2}{2n^3\cdot 2n^6}=\frac{80n^2}{4n^9}=20\cdot n^{-7}=10\cdot 2\cdot n^{-7}\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi $k=-7$ oraz $C=2$.

Zadanie 2 (20 punktów) (wersja 1)

Dobrać odpowiednią liczbę całkowitą k oraz liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\cdot n^k \leqslant \sqrt[4]{n^{12}+80n^3}-n^3 \leqslant 10C\cdot n^k\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, dwukrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^{12}+80n^3}-n^3=\frac{\sqrt{n^{12}+80n^3}-n^6}{\sqrt[4]{n^{12}+80n^3}+n^3}=\frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^3}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^3}+n^6\right)}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^3}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^3}+n^6\right)}\geqslant\frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^{12}}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^{12}}+n^6\right)}=$$

$$=\frac{80n^3}{4n^3\cdot 10n^6}=\frac{80n^3}{40n^9}=2\cdot n^{-6}$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^3}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^3}+n^6\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{80n^3}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+0}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+0}+n^6\right)}=\frac{80n^3}{2n^3\cdot 2n^6}=\frac{80n^3}{4n^9}=20\cdot n^{-6}=10\cdot 2\cdot n^{-6}\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi $k=-6$ oraz $C=2$.

Zadanie 2 (20 punktów) (wersja 2)

Dobrać odpowiednią liczbę całkowitą k oraz liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\cdot n^k \leqslant \sqrt[4]{n^{12}+80n^4}-n^3 \leqslant 10C\cdot n^k\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, dwukrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^{12}+80n^4}-n^3=\frac{\sqrt{n^{12}+80n^4}-n^6}{\sqrt[4]{n^{12}+80n^4}+n^3}=\frac{80n^4}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^4}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^4}+n^6\right)}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\frac{80n^4}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^4}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^4}+n^6\right)}\geqslant\frac{80n^4}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^{12}}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^{12}}+n^6\right)}=$$

$$=\frac{80n^4}{4n^3\cdot 10n^6}=\frac{80n^4}{40n^9}=2\cdot n^{-5}$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{80n^4}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^4}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^4}+n^6\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{80n^4}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+0}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+0}+n^6\right)}=\frac{80n^4}{2n^3\cdot 2n^6}=\frac{80n^4}{4n^9}=20\cdot n^{-5}=10\cdot 2\cdot n^{-5}\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi $k=-5$ oraz $C=2$.

Zadanie 2 (20 punktów) (wersja 3)

Dobrać odpowiednią liczbę całkowitą k oraz liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\cdot n^k \leqslant \sqrt[4]{n^{12}+80n^5}-n^3 \leqslant 10C\cdot n^k\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, dwukrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^{12}+80n^5}-n^3=\frac{\sqrt{n^{12}+80n^5}-n^6}{\sqrt[4]{n^{12}+80n^5}+n^3}=\frac{80n^5}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^5}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^5}+n^6\right)}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\frac{80n^5}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^5}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^5}+n^6\right)}\geqslant\frac{80n^5}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^{12}}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^{12}}+n^6\right)}=$$

$$=\frac{80n^5}{4n^3\cdot 10n^6}=\frac{80n^5}{40n^9}=2\cdot n^{-4}$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{80n^5}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^5}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^5}+n^6\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{80n^5}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+0}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+0}+n^6\right)}=\frac{80n^5}{2n^3\cdot 2n^6}=\frac{80n^5}{4n^9}=20\cdot n^{-4}=10\cdot 2\cdot n^{-4}\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi $k=-4$ oraz $C=2$.

Zadanie 2 (20 punktów) (wersja 4)

Dobrać odpowiednią liczbę całkowitą k oraz liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\cdot n^k \leqslant \sqrt[4]{n^{12}+80n^6}-n^3 \leqslant 10C\cdot n^k\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, dwukrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera. Otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^{12}+80n^6}-n^3=\frac{\sqrt{n^{12}+80n^6}-n^6}{\sqrt[4]{n^{12}+80n^6}+n^3}=\frac{80n^6}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^6}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^6}+n^6\right)}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\frac{80n^6}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^6}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^6}+n^6\right)}\geqslant\frac{80n^6}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^{12}}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^{12}}+n^6\right)}=$$

$$=\frac{80n^6}{4n^3\cdot 10n^6}=\frac{80n^6}{40n^9}=2\cdot n^{-3}$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{80n^6}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+80n^6}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+80n^6}+n^6\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{80n^6}{\left(\sqrt[4]{n^{12}+0}+n^3\right)\cdot\left(\sqrt{n^{12}+0}+n^6\right)}=\frac{80n^6}{2n^3\cdot 2n^6}=\frac{80n^6}{4n^9}=20\cdot n^{-3}=10\cdot 2\cdot n^{-3}\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi $k=-3$ oraz $C=2$.

Zadanie 3 (20 punktów) (wersja 0)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{10}}-\sqrt[5]{1+\frac{1}{10}} \qquad \text{czy} \qquad \frac{1}{200}\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{4\cdot x^{3/4}}-\frac{1}{5\cdot x^{4/5}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{3}{16\cdot x^{7/4}}+\frac{4}{25\cdot x^{9/5}}=\frac{64-75\cdot x^{1/20}}{400\cdot x^{9/5}}<0$$

dla $x>1$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $(1,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>1$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1,0)$. Ponieważ $f'(1)=1/20$, dla $x>1$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(1)+\frac{1}{20}\cdot(x-1)=\frac{x-1}{20}$$

i w konsekwencji przyjmując $x=1+\frac{1}{10}$ otrzymujemy

$$f\left(1+\frac{1}{10}\right)<\frac{1}{200}\,.$$

Odpowiedź:

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{10}}-\sqrt[5]{1+\frac{1}{10}} \qquad < \qquad \frac{1}{200}\,.$$

Zadanie 3 (20 punktów) (wersja 1)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{11}}-\sqrt[5]{1+\frac{1}{11}} \qquad \text{czy} \qquad \frac{1}{220}\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{4\cdot x^{3/4}}-\frac{1}{5\cdot x^{4/5}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{3}{16\cdot x^{7/4}}+\frac{4}{25\cdot x^{9/5}}=\frac{64-75\cdot x^{1/20}}{400\cdot x^{9/5}}<0$$

dla $x>1$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $(1,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>1$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1,0)$. Ponieważ $f'(1)=1/20$, dla $x>1$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(1)+\frac{1}{20}\cdot(x-1)=\frac{x-1}{20}$$

i w konsekwencji przyjmując $x=1+\frac{1}{11}$ otrzymujemy

$$f\left(1+\frac{1}{11}\right)<\frac{1}{220}\,.$$

Odpowiedź:

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{11}}-\sqrt[5]{1+\frac{1}{11}} \qquad < \qquad \frac{1}{220}\,.$$

Zadanie 3 (20 punktów) (wersja 2)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{12}}-\sqrt[5]{1+\frac{1}{12}} \qquad \text{czy} \qquad \frac{1}{240}\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{4\cdot x^{3/4}}-\frac{1}{5\cdot x^{4/5}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{3}{16\cdot x^{7/4}}+\frac{4}{25\cdot x^{9/5}}=\frac{64-75\cdot x^{1/20}}{400\cdot x^{9/5}}<0$$

dla $x>1$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $(1,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>1$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1,0)$. Ponieważ $f'(1)=1/20$, dla $x>1$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(1)+\frac{1}{20}\cdot(x-1)=\frac{x-1}{20}$$

i w konsekwencji przyjmując $x=1+\frac{1}{12}$ otrzymujemy

$$f\left(1+\frac{1}{12}\right)<\frac{1}{240}\,.$$

Odpowiedź:

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{12}}-\sqrt[5]{1+\frac{1}{12}} \qquad < \qquad \frac{1}{240}\,.$$

Zadanie 3 (20 punktów) (wersja 3)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{13}}-\sqrt[5]{1+\frac{1}{13}} \qquad \text{czy} \qquad \frac{1}{260}\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{4\cdot x^{3/4}}-\frac{1}{5\cdot x^{4/5}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{3}{16\cdot x^{7/4}}+\frac{4}{25\cdot x^{9/5}}=\frac{64-75\cdot x^{1/20}}{400\cdot x^{9/5}}<0$$

dla $x>1$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $(1,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>1$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1,0)$. Ponieważ $f'(1)=1/20$, dla $x>1$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(1)+\frac{1}{20}\cdot(x-1)=\frac{x-1}{20}$$

i w konsekwencji przyjmując $x=1+\frac{1}{13}$ otrzymujemy

$$f\left(1+\frac{1}{13}\right)<\frac{1}{260}\,.$$

Odpowiedź:

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{13}}-\sqrt[5]{1+\frac{1}{13}} \qquad < \qquad \frac{1}{260}\,.$$

Zadanie 3 (20 punktów) (wersja 4)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{14}}-\sqrt[5]{1+\frac{1}{14}} \qquad \text{czy} \qquad \frac{1}{280}\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{4\cdot x^{3/4}}-\frac{1}{5\cdot x^{4/5}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{3}{16\cdot x^{7/4}}+\frac{4}{25\cdot x^{9/5}}=\frac{64-75\cdot x^{1/20}}{400\cdot x^{9/5}}<0$$

dla $x>1$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $(1,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>1$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1,0)$. Ponieważ $f'(1)=1/20$, dla $x>1$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(1)+\frac{1}{20}\cdot(x-1)=\frac{x-1}{20}$$

i w konsekwencji przyjmując $x=1+\frac{1}{14}$ otrzymujemy

$$f\left(1+\frac{1}{14}\right)<\frac{1}{280}\,.$$

Odpowiedź:

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{14}}-\sqrt[5]{1+\frac{1}{14}} \qquad < \qquad \frac{1}{280}\,.$$

Zadanie 3 (20 punktów) (wersja 5)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{15}}-\sqrt[5]{1+\frac{1}{15}} \qquad \text{czy} \qquad \frac{1}{300}\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{4\cdot x^{3/4}}-\frac{1}{5\cdot x^{4/5}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{3}{16\cdot x^{7/4}}+\frac{4}{25\cdot x^{9/5}}=\frac{64-75\cdot x^{1/20}}{400\cdot x^{9/5}}<0$$

dla $x>1$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $(1,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>1$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1,0)$. Ponieważ $f'(1)=1/20$, dla $x>1$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(1)+\frac{1}{20}\cdot(x-1)=\frac{x-1}{20}$$

i w konsekwencji przyjmując $x=1+\frac{1}{15}$ otrzymujemy

$$f\left(1+\frac{1}{15}\right)<\frac{1}{300}\,.$$

Odpowiedź:

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{15}}-\sqrt[5]{1+\frac{1}{15}} \qquad < \qquad \frac{1}{300}\,.$$

Zadanie 3 (20 punktów) (wersja 6)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{16}}-\sqrt[5]{1+\frac{1}{16}} \qquad \text{czy} \qquad \frac{1}{320}\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{4\cdot x^{3/4}}-\frac{1}{5\cdot x^{4/5}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{3}{16\cdot x^{7/4}}+\frac{4}{25\cdot x^{9/5}}=\frac{64-75\cdot x^{1/20}}{400\cdot x^{9/5}}<0$$

dla $x>1$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $(1,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>1$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1,0)$. Ponieważ $f'(1)=1/20$, dla $x>1$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(1)+\frac{1}{20}\cdot(x-1)=\frac{x-1}{20}$$

i w konsekwencji przyjmując $x=1+\frac{1}{16}$ otrzymujemy

$$f\left(1+\frac{1}{16}\right)<\frac{1}{320}\,.$$

Odpowiedź:

$$\sqrt[4]{1+\frac{1}{16}}-\sqrt[5]{1+\frac{1}{16}} \qquad < \qquad \frac{1}{320}\,.$$