Dzień 41 (piątek 15 maja 2020)

Szeregi Fouriera.

Przypomnę, że szeregiem Fouriera funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ okresowej o okresie 2π i takiej, że poniższe całki istnieją, nazywamy[1] szereg trygonometryczny

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\,, \tag{F}$$

gdzie

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)\,dx\,, \tag{$F0$}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx \tag{FA}$$

oraz

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx\,. \tag{FB}$$

Byłoby miło, gdyby szereg Fouriera funkcji był zbieżny, a jego sumą była funkcja f. Okazuje się, że stosunkowo niewiele trzeba zakładać o funkcji f, aby tak było.

Wprawdzie znane są przykłady funkcji[2] ciągłych, których szereg Fouriera jest rozbieżny w wielu[3] punktach, ale z naszego[4] punktu widzenia są to przykłady nietypowe.

Kluczowe jest to, aby funkcja nie była za bardzo pofałdowana. Są różne sformułowania warunku wymuszającego taki brak pofałdowania, ale wydaje się że dla naszych zastosowań najprostsze i najodpowiedniejsze będzie następujące twierdzenie:

[1]W literaturze często spotyka się szereg Fouriera zapisany w postaci

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\,,$$

gdzie

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)\,dx\,.$$

To tylko kwestia gustu, co bardziej nas drażni: sztuczne $\frac{a_0}{2}$ w powyższym wzorze, czy inny współczynnik przed całką we wzorze $(F0)$ niż we wzorach (FA) i (FB).

[2]Oczywiście okresowych o okresie 2π, innych w tym momencie nie rozważamy.

[3]Rozbieżny na gęstym zbiorze punktów.

[4]Z naszego, to znaczy przyzwyczajonych do podawania funkcji w miarę ładnymi wzorkami. Z punktu widzenia bardziej zaawansowanej matematyki są to jednak przykłady typowe w tym sensie, że większość (cokolwiek to znaczy) funkcji ciągłych ma szereg Fouriera rozbieżny na zbiorze gęstym.

Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π, która:
• w pojedynczym okresie ma skończenie wiele punktów nieciągłości,
• w każdym punkcie nieciągłości ma granice jednostronne,
• w każdym punkcie[5] ma wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych,
• jest przedziałami monotoniczna, to znaczy, że pojedynczy okres można tak podzielić na skończenie wiele przedziałów, że w każdym z nich funkcja jest monotoniczna.

Wówczas szereg Fouriera funkcji f jest punktowo zbieżny, a f jest jego sumą.

Innymi słowy, funkcję spełniającą powyższe warunki możemy zapisać w postaci sumy szeregu[6] trygonometrycznego.

Przyjrzyjmy się konkretnym przykładom oraz wnioskom, jakie można przy pomocy tych przykładów wyciągnąć. Zwracam uwagę, że definiując funkcję okresową wystarczy podać jej wzór na jakimkolwiek przedziale długości 2π.

Przykład 1: Niech f będzie zdefiniowana wzorem $f(x)=x$ dla $x\in(-\pi,\pi)$.

Ponieważ f jest okresowa o okresie 2π, jej wykres wygląda jak na rysunkach 1 i 2. Widzimy, że w nieparzystych wielokrotnościach liczby π funkcja f jest nieciągła. Jeśli jednak chcemy, aby była ona sumą swojego szeregu Fouriera, powinniśmy w tych punktach przyjąć[7] wartość funkcji równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych, czyli w tym wypadku[8] 0.

Do obliczenia współczynników szeregu Fouriera funkcji f użyjemy wzorów $(F0)$, (FA) i (FB) pamiętając, że występujące w nich całki oznaczone mają być liczone po przedziale długości[9] 2π, ale przedział ten można wybrać dowolnie. W tym wypadku wygodniej będzie całkować od $-\pi$ do π. Wobec tego[10]:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\,dx=0\,, \qquad\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cdot\cos nx\,dx=0\,.$$

---

[5] W punktach ciągłości to niczego nie wnosi. Chodzi o to, że w każdym punkcie nieciągłości x_0 mamy

$$f(x_0)=\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}\,.$$

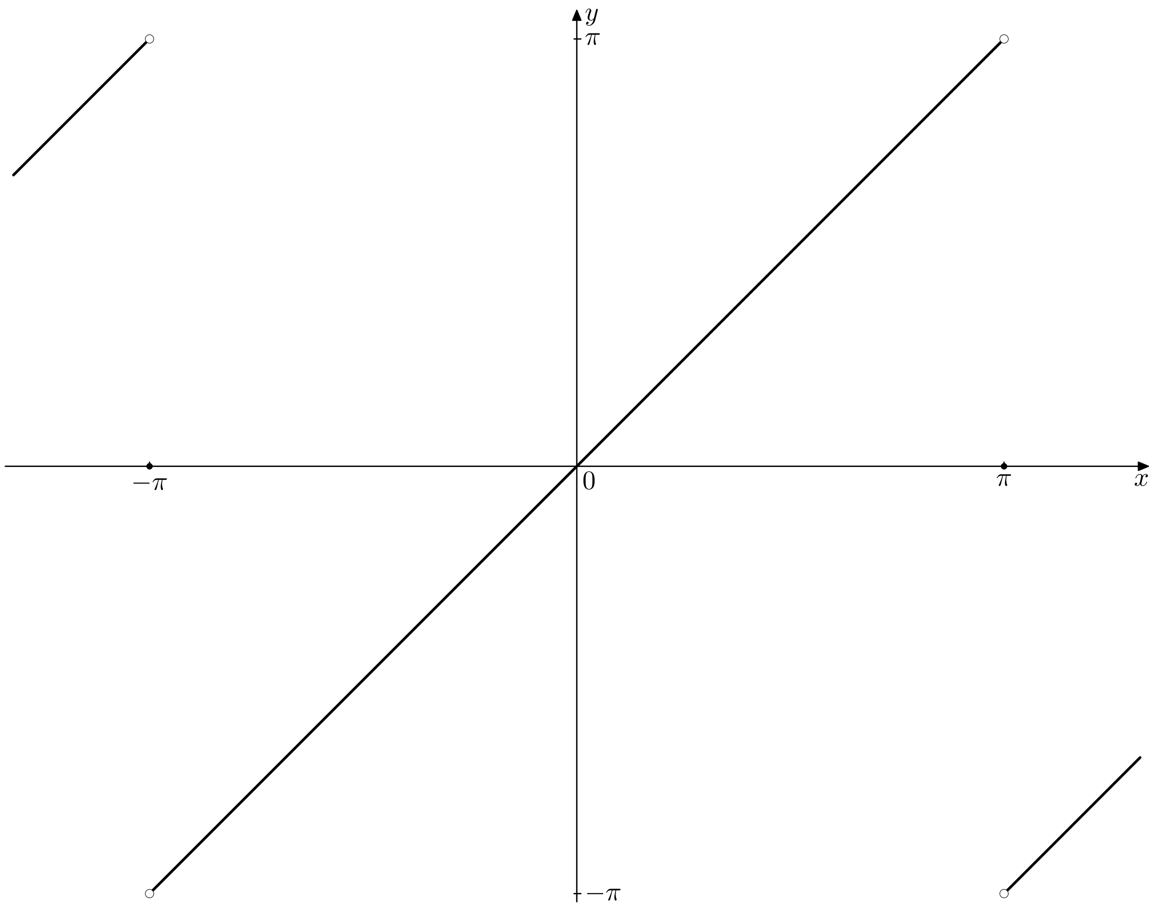
[6] Zbieżnego punktowo.

[7] Ponieważ zmiana funkcji podcałkowej w jednym punkcie nie wpływa na wartość całki oznaczonej, szereg Fouriera funkcji f nie zależy od tego jaką wartość przyjmniemy w punktach nieciągłości. Jednak szereg Fouriera w punktach nieciągłości jest zbieżny do średniej arytmetycznej granic jednostronnych funkcji, więc lepiej, żeby ta średnia była wartością funkcji.

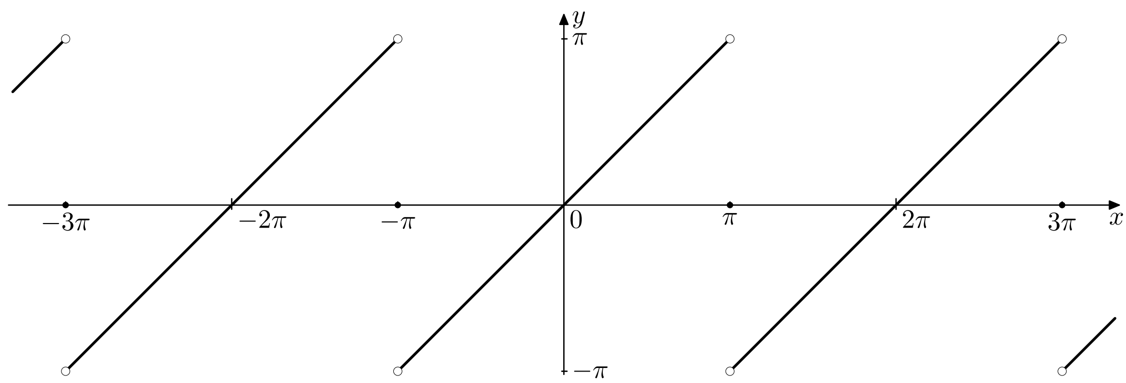
[8] Bo granica lewostronna jest równa π, a prawostronna $-\pi$.

[9] Czyli po pełnym okresie funkcji f.

[10] Pamiętajmy, że całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera jest zerem.



rys. 1



rys. 2

oraz[11]

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}x\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot x\cdot\frac{-\cos nx}{n}\Bigg|_{x=-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\frac{-\cos nx}{n}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\pi\cdot\frac{-\cos n\pi}{n}-\frac{1}{\pi}\cdot(-\pi)\cdot\frac{-\cos n(-\pi)}{n}-\underbrace{\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{-\sin nx}{n^2}\Bigg|_{x=-\pi}^{\pi}\right)}_{=0}=-\frac{2\cos n\pi}{n}=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\,.$$

[11] Całkując przez części.

Wobec tego dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin nx}{n}=2\sin x-\sin 2x+\frac{2\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{2}+\frac{2\sin 5x}{5}-\frac{\sin 6x}{3}+\ldots$$

Natomiast dla $x\in(-\pi,\,\pi)$ mamy

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin nx}{n}=2\sin x-\sin 2x+\frac{2\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{2}+\frac{2\sin 5x}{5}-\frac{\sin 6x}{3}+\ldots$$

Podstawiając do powyższych wzorów takie wartości x, dla których jesteśmy w stanie kontrolować wartości sinusów występujące w szeregu, będziemy dostawać różne równości, czasami trywialne, czasami głębokie.

I tak dla $x=0$ otrzymujemy, że zero jest sumą szeregu zer. Mało podniecające. To samo będzie dla $x=\pi$.

Spróbujmy $x=\pi/2$. Pamiętając, że

$$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & \text{dla } n \text{ parzystych}\\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych}\end{cases}$$

otrzymujemy równość[12]

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{2\not|\,n}\frac{2\cdot\overbrace{(-1)^{n+1}}^{=1}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}}{n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}}{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^k}{2k+1}=2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\,,$$

skąd

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$$

Ta równość jest dalece nietrywialna, chociaż jest nam już znana[13].

Przykład 2: Niech f będzie zdefiniowana wzorem $f(x)=|x|$ dla $x\in[-\pi,\,\pi)$.

Ponieważ f jest okresowa o okresie 2π, jej wykres wygląda jak na rysunkach 3 i 4. Widzimy, że funkcja f jest ciągła.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, do obliczenia współczynników szeregu Fouriera funkcji f użyjemy wzorów $(F0)$, (FA) i (FB) z granicami całkowania od $-\pi$ do π:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\pi/2\,,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cdot\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi}|x|\cdot\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi}x\cdot\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos n\pi-1}{n^2}\,.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cdot\sin nx\,dx=0\,.$$

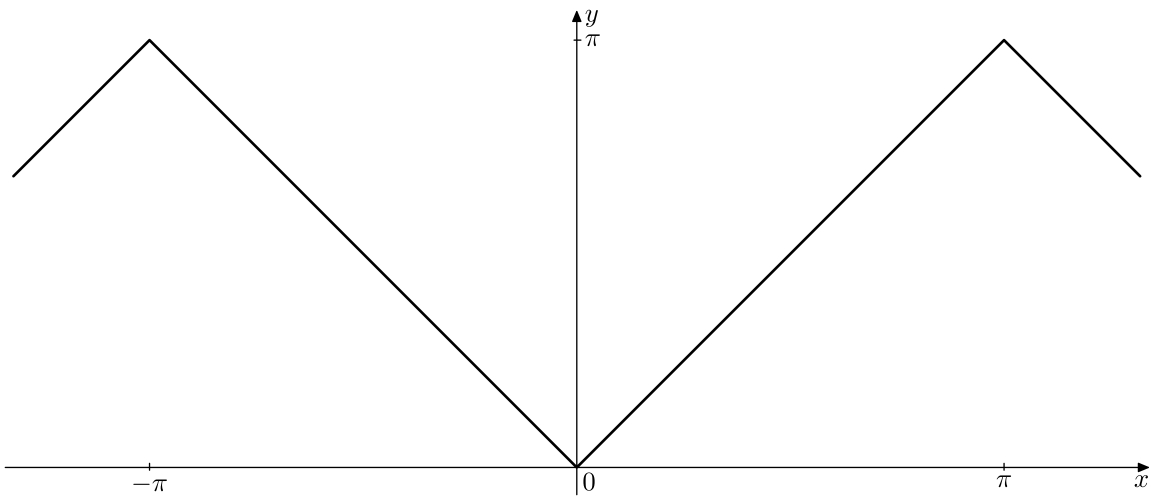
[12]Pierwsze sumowanie odbywa się po n nieparzystych, a w drugim numerujemy liczby nieparzyste n przyjmując $n=2k+1$.

[13]Pamiętacie? Rozwinięcie arcusa tangensa w szereg potęgowy. Korona31, strona 252.

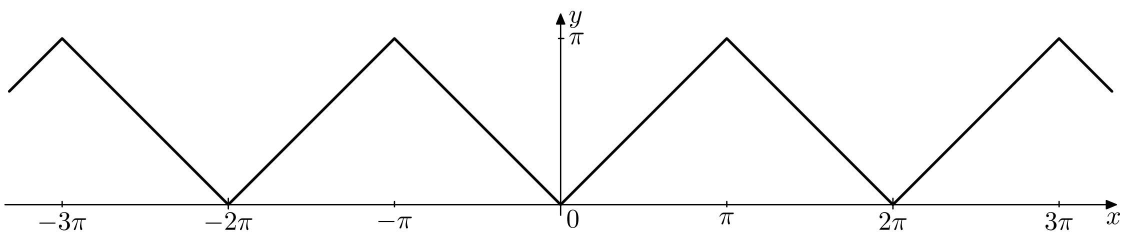
Całkę we wzorze na a_0 obliczamy geometrycznie (patrząc na pole figury pod wykresem).
Całkę we wzorze na a_n obliczamy przez części[14] (rachunki są standardowe, więc je pomijam).
Całka we wzorze na b_n jest zerem jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera.

Pewnego uproszczenia wymaga otrzymany wzór na a_n:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos n\pi - 1}{n^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ -4/(\pi \cdot n^2) & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$



rys. 3



rys. 4

W konsekwencji rozwinięcie funkcji f w szereg Fouriera jest następujące:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4\cos(2k+1)x}{\pi \cdot (2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4\cos x}{\pi} - \frac{4\cos 3x}{\pi \cdot 9} - \frac{4\cos 5x}{\pi \cdot 25} - \frac{4\cos 7x}{\pi \cdot 49} - \ldots$$

[14]Stosując przedtem wzór

$$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} g(x)\,dx$$

prawdziwy dla funkcji parzystej g.

Dla $x=0$ otrzymujemy równość

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\,,$$

skąd

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\,.$$

Z kropeczkami to wygląda tak:

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}\,.$$

Słownie: Suma odwrotności kwadratów nieparzystych liczb naturalnych jest równa $\pi^2/8$.

Otrzymaliśmy więc kolejny bardzo nietrywialny wzór. Zapewne odczuwamy pewnien niedosyt, bo wolelibyśmy otrzymać wartość podobnej, ale chyba trochę bardziej estetycznej sumy, a mainowicie sumy odwrotności kwadratów wszystkich liczb całkowitych dodatnich. Nic straconego, okazuje się bowiem, że jesteśmy o krok od uzyskania także wartości tej sumy. Jeśli bowiem oznaczymy

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\ldots$$

oraz

$$T=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\ldots\,,$$

to[15]

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{2\nmid n}\frac{1}{n^2}+\sum_{2\,|\,n}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=T+\frac{1}{4}\cdot S\,,$$

skąd

$$S=\frac{4}{3}\cdot T\,.$$

W konsekwencji

$$S=\frac{4}{3}\cdot T=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}\,.$$

Otrzymaliśmy więc wzór:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}\,.$$

Widać w tych metodach ogromną siłę, gdyż byliśmy w stanie obliczyć sumy szeregów liczbowych w sytuacji, kiedy sama postać tych sum odbiera nadzieję na ich uzyskanie prostymi elementarnymi metodami.

[15] Jeśli się gubisz w tych sumach, rozpisz je sobie z kropeczkami.