63. Skonstruować funkcję różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$f(0)=0 \qquad \text{oraz} \qquad f'(x)=\sqrt{x^4+2x^3+x^2} \quad \text{dla} \quad x\in\mathbb{R}\,.$$

Rozwiązanie:

Przepisujemy wzór na pochodną funkcji f:

$$f'(x)=\sqrt{x^4+2x^3+x^2}=\sqrt{\left(x^2+x\right)^2}=\left|x^2+x\right|=\begin{cases} x^2+x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,-1]\cup[0,+\infty) \\ -x^2-x & \text{dla} \quad x\in(-1,0) \end{cases}$$

Dla $x\in(-\infty,-1]$ zachodzi $f'(x)=x^2+x$, mamy więc[1]

$$f(x)=\int x^2+x\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_1\,.$$

Dla $x\in[-1,0]$ zachodzi $f'(x)=-x^2-x$, mamy więc

$$f(x)=\int -x^2-x\,dx=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C_2\,.$$

Dla $x\in[0,+\infty)$ zachodzi $f'(x)=x^2+x$, mamy więc

$$f(x)=\int x^2+x\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_3\,.$$

Aby zagwarantować warunek $f(0)=0$, należy przyjąć $C_2=C_3=0$.

Aby zagwarantować zgodność określenia $f(-1)$, musi być

$$\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+C_1=-\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}+C_2\,,$$

czyli

$$\frac{1}{6}+C_1=-\frac{1}{6}\,,$$

skąd $C_1=-1/3$.

Ostatecznie otrzymujemy

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{3} & \text{dla} \quad x\in(-\infty,-1] \\ -\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2} & \text{dla} \quad x\in(-1,0) \\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2} & \text{dla} \quad x\in[0,+\infty) \end{cases}$$

---

[1]Dokładniej: Funkcja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $g(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_1$ ma na całej prostej pochodną określoną wzorem $g'(x)=x^2+x$, skąd wynika, że jeżeli $f(x)=g(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_1$ dla $x\in(-\infty,-1]$, to $f'(x)=g'(x)=x^2+x$ dla $x\in(-\infty,-1)$ oraz $f'(x^-)=g'(x)=x^2+x$ dla $x=-1$.

Co więcej, wzór $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_1$ dla $x\in(-\infty,-1]$ definiuje wszystkie funkcje różniczkowalne $f:(-\infty,-1]\to\mathbb{R}$ spełniające warunki $f'(x)=x^2+x$ dla $x\in(-\infty,-1)$ oraz $f'(x^-)=x^2+x$ dla $x=-1$.

64. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=6x+6 \qquad \text{dla} \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=x$ dla $x\in\{-1,0,2\}$. Wyznaczyć $f(3)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3+3x^2\right)=6x+6\,,$$

a funkcjami o drugiej pochodnej równej 0 są funkcje liniowe, funkcja f jest określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2+Ax+B & \text{dla} \quad x\in(-\infty,1) \\ x^3+3x^2+Cx+D & \text{dla} \quad x\in[1,+\infty) \end{cases}$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 1 wymaga zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x=1$, czyli musi zachodzić równość

$$A+B=C+D\,. \qquad (\clubsuit)$$

Warunki $f(x)=x$ dla $x\in\{-1,0,2\}$ sprowadzają się odpowiednio do

$$-1=2-A+B\,, \qquad (\diamondsuit)$$

$$0=B\,, \qquad (\heartsuit)$$

$$2=20+2C+D\,. \qquad (\spadesuit)$$

Rozwiązanie układu otrzymanych czterech równań $(\clubsuit)$, $(\diamondsuit)$, $(\heartsuit)$ i $(\spadesuit)$ prowadzi do

$$A=3\,, \qquad B=0\,, \qquad C=-21\,, \qquad D=24\,.$$

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2+3x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,1) \\ x^3+3x^2-21x+24 & \text{dla} \quad x\in[1,+\infty) \end{cases}$$

Zatem $f(3)=15$.

65. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$f'(x)=\sqrt{x^4-8x^2+16}\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(-3)=-3$. Wyznaczyć $f(3)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f'(x)=\sqrt{x^4-8x^2+16}=\sqrt{\left(x^2-4\right)^2}=\left|x^2-4\right|=\begin{cases} x^2-4 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,-2) \\ 4-x^2 & \text{dla} \quad x\in[-2,2) \\ x^2-4 & \text{dla} \quad x\in[2,+\infty) \end{cases}$$

Wobec tego

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-4x+C_1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,-2) \\ 4x-\dfrac{x^3}{3}+C_2 & \text{dla} \quad x\in[-2,2) \\ \dfrac{x^3}{3}-4x+C_3 & \text{dla} \quad x\in[2,+\infty) \end{cases}$$

Ciągłość tak określonej funkcji f w punktach -2 oraz 2 wymaga odpowiednio spełnienia następujących równości:

$$\frac{x^3}{3}-4x+C_1=4x-\frac{x^3}{3}+C_2 \quad \text{dla} \quad x=-2, \quad \text{czyli} \quad \frac{16}{3}+C_1=-\frac{16}{3}+C_2$$

oraz

$$4x-\frac{x^3}{3}+C_2=\frac{x^3}{3}-4x+C_3 \quad \text{dla} \quad x=2, \quad \text{czyli} \quad \frac{16}{3}+C_2=-\frac{16}{3}+C_3\,.$$

Ponadto równość $f(-3)=-3$ prowadzi do

$$\frac{x^3}{3}-4x+C_1=-3 \quad \text{dla} \quad x=-3, \quad \text{skąd} \quad C_1=-6\,.$$

W konsekwencji

$$C_2=C_1+\frac{32}{3}=\frac{14}{3} \quad \text{oraz} \quad C_3=C_2+\frac{32}{3}=\frac{46}{3}\,.$$

Zatem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-4x-6 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,-2) \\ 4x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{14}{3} & \text{dla} \quad x\in[-2,2) \\ \dfrac{x^3}{3}-4x+\dfrac{46}{3} & \text{dla} \quad x\in[2,+\infty) \end{cases}$$

Ostatecznie

$$f(3)=\frac{3^3}{3}-4\cdot 3+\frac{46}{3}=\frac{37}{3}\,.$$

66. Wiedząc, że

$$\frac{d}{dx}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \arcsin x\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Dopisujemy do funkcji podcałkowej czynnik 1, po czym wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik 1 i różniczkując $\arcsin x$. Otrzymujemy:

$$\int \arcsin x\,dx=\int 1\cdot\arcsin x\,dx=x\cdot\arcsin x-\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

W ostatniej całce wykonujemy podstawienie $t=1-x^2$, w którym stosujemy formalny wzór $dt=-2x\,dx$. Otrzymujemy:

$$\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\sqrt{t}+C_1=-\sqrt{1-x^2}+C_1\,.$$

W konsekwencji

$$\int\arcsin x\,dx=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C\,.$$

67. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$J(x)=\int x^2\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx\,.$$

Sprawdzić, że $J(1)=J(-1)+\frac{33\sqrt[3]{2}}{70}$, a jeśli tak nie jest, poszukać błędu rachunkowego.

Rozwiązanie:

Sposób I

Dwukrotnie całkujemy przez części:

$$J(x)=\int x^2\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx=x^2\cdot\frac{3\cdot(x+1)^{4/3}}{4}-\frac{3}{2}\cdot\int x\cdot(x+1)^{4/3}\,dx=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot x^2\cdot(x+1)^{4/3}-\frac{3}{2}\cdot x\cdot\frac{3\cdot(x+1)^{7/3}}{7}+\frac{9}{14}\cdot\int(x+1)^{7/3}\,dx=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot x^2\cdot(x+1)^{4/3}-\frac{9}{14}\cdot x\cdot(x+1)^{7/3}+\frac{27}{140}\cdot(x+1)^{10/3}+C\,.$$

Sprawdzenie:

$$J(-1)=C\,,$$

$$J(1)=\frac{3}{4}\cdot 2\sqrt[3]{2}-\frac{9}{14}\cdot 4\sqrt[3]{2}+\frac{27}{140}\cdot 8\sqrt[3]{2}+C=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{2}-\frac{18}{7}\cdot\sqrt[3]{2}+\frac{54}{35}\cdot\sqrt[3]{2}+C=$$

$$=\frac{105}{70}\cdot\sqrt[3]{2}-\frac{180}{70}\cdot\sqrt[3]{2}+\frac{108}{70}\cdot\sqrt[3]{2}+C=\frac{105-180+108}{70}\cdot\sqrt[3]{2}+C=$$

$$=\frac{33}{70}\cdot\sqrt[3]{2}+C=J(-1)+\frac{33\sqrt[3]{2}}{70}\,.$$

Sposób II

Wykonujemy podstawienie $t=\sqrt[3]{x+1}$, czyli $x=t^3-1$ i formalnie $dx=3t^2\,dt$:

$$J(x)=\int x^2\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx=\int\left(t^3-1\right)^2\cdot t\cdot 3t^2\,dt=3\cdot\int t^9-2t^6+t^3\,dt=$$

$$=\frac{3}{10}\cdot t^{10}-\frac{6}{7}\cdot t^7+\frac{3}{4}\cdot t^4+C=\frac{3}{10}\cdot(x+1)^{10/3}-\frac{6}{7}\cdot(x+1)^{7/3}+\frac{3}{4}\cdot(x+1)^{4/3}+C\,.$$

Sprawdzenie:

$$J(-1)=C\,,$$

$$J(1)=\frac{3}{10}\cdot 8\sqrt[3]{2}-\frac{6}{7}\cdot 4\sqrt[3]{2}+\frac{3}{4}\cdot 2\sqrt[3]{2}+C=\frac{12}{5}\cdot\sqrt[3]{2}-\frac{24}{7}\cdot\sqrt[3]{2}+\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{2}+C=$$

$$=\frac{168}{70}\cdot\sqrt[3]{2}-\frac{240}{70}\cdot\sqrt[3]{2}+\frac{105}{70}\cdot\sqrt[3]{2}+C=\frac{168-240+105}{70}\cdot\sqrt[3]{2}+C=$$

$$=\frac{33}{70}\cdot\sqrt[3]{2}+C=J(-1)+\frac{33\sqrt[3]{2}}{70}\,.$$

Sposób III

Wykonujemy podstawienie $t=x+1$, czyli $x=t-1$ i formalnie $dx=dt$:

$$J(x)=\int x^2\cdot\sqrt[3]{x+1}\,dx=\int (t-1)^2\cdot\sqrt[3]{t}\,dt=\int t^{7/3}-2t^{4/3}+t^{1/3}\,dt=$$

$$=\frac{3}{10}\cdot t^{10/3}-\frac{6}{7}\cdot t^{7/3}+\frac{3}{4}\cdot t^{4/3}+C=\frac{3}{10}\cdot(x+1)^{10/3}-\frac{6}{7}\cdot(x+1)^{7/3}+\frac{3}{4}\cdot(x+1)^{4/3}+C\,.$$

Sprawdzenie jak w sposobie II.

68. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{x+2}}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Dwukrotnie całkujemy przez części:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{x+2}}\,dx=\int x^2\cdot(x+2)^{-1/3}\,dx=x^2\cdot\frac{3\cdot(x+2)^{2/3}}{2}-3\cdot\int x\cdot(x+2)^{2/3}\,dx=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot x^2\cdot(x+2)^{2/3}-3\cdot x\cdot\frac{3\cdot(x+2)^{5/3}}{5}+\frac{9}{5}\cdot\int(x+2)^{5/3}\,dx=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot x^2\cdot(x+2)^{2/3}-\frac{9}{5}\cdot x\cdot(x+2)^{5/3}+\frac{27}{40}\cdot(x+2)^{8/3}+C\,.$$

Uwagi:

Daną w zadaniu całkę można również obliczyć całkując przez podstawienie $t=x+2$ lub $t=\sqrt[3]{x+2}$.

Całkowanie przez podstawienie musi prowadzić do tego samego wyniku, ale może być on w innej postaci – dopiero po wykonaniu odpowiednich przekształceń można stwierdzić zgodność obydwu odpowiedzi.