Kolokwium nr 7: poniedziałek 2.12.2019, godz. 10:15-11:00, materiał zad. 1–436.

Poziom standardowy (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

7. Szeregi liczbowe.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 25,28.11.2019 (grupy 1, 2, 4).
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

422. Obliczyć $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7^k}$, a następnie znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

423. Obliczyć sumę szeregu

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-6)^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}$

Wskazówka: W kolejnych pięciu zadaniach szukać przykładu szeregu geometrycznego.

424. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\,.$$

425. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=2\,.$$

426. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że dla dowolnej liczby naturalnej k zachodzi równość

$$a_k=2\cdot\sum_{n=k+1}^{\infty}a_n\,.$$

427. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{4}\,.$$

428. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^4=\frac{1}{5}\,.$$

429. Dowieść, że $6<\sum_{n=1}^{2047}\frac{1}{n}<11$.

430. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$ jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

431. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$.

432. Dany jest zbieżny szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ o sumie S. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=T\,.$$

Wyznaczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ w zależności od S i T.

433. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

434. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n}$.

435. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^3-4n}$.

436. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n}$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.
Pomoc w rozwiązaniu tych zadań można uzyskać na ćwiczeniach grupy 5 w czwartek 28.11.2019 — nie będą omawiane na ćwiczeniach grup 1, 2, 4.

Kwantyfikatory, implikacja, alternatywa, koniunkcja.

437. Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których prawdziwa jest podana implikacja
a) $x>0\Rightarrow x+1>0$
b) $x>0\Rightarrow x-1>0$
c) $x=3\Rightarrow x>0$
d) $x=-3\Rightarrow x>0$
e) $x^2=4\Rightarrow x=2$
f) $x^2=-4\Rightarrow x=-2$

W kolejnych dziesięciu zadaniach x, y przebiegają liczby rzeczywiste, natomiast m, n przebiegają liczby naturalne (całkowite dodatnie).

438. Połączyć podane warunki w grupy warunków równoważnych
a) $\underset{m}{\exists} n=2m$
b) $\underset{m}{\exists} m=2n$
c) $\underset{m}{\exists} m=3n$
d) $\underset{m}{\exists} n=9m$
e) $\underset{m}{\exists} n^2=9m$
f) $\underset{m}{\exists} n^3=9m$
g) $\underset{m}{\exists} n^2=27m$
h) $\underset{m}{\exists} n^3=27m$
i) $\underset{m}{\exists} n=2m-1$
j) $\underset{m}{\exists} n=2m+1$
k) $\underset{m}{\forall} n\neq 2m$
l) liczba n jest nieparzysta
m) liczba n jest podzielna przez 3
n) liczba n jest podzielna przez 9
o) liczba n jest parzysta
p) liczba n jest nieparzysta i różna od 1

W kolejnych siedmiu zadaniach każdemu warunkowi oznaczonemu literą przypisać równoważny warunek oznaczony cyfrą.

439. **a)** $x>0\Rightarrow -x>0$ **b)** $x>0\Rightarrow |x|>0$ **c)** $-x>0\Rightarrow x>0$ **d)** $|x|>0\Rightarrow x>0$
1) $x\geqslant 0$ **2)** $x\leqslant 0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

440. **a)** $\underset{x}{\forall} (x>0\Rightarrow -x>0)$ **b)** $\underset{x}{\forall} (x>0\Rightarrow |x|>0)$
c) $\underset{x}{\forall} (-x>0\Rightarrow x>0)$ **d)** $\underset{x}{\forall} (|x|>0\Rightarrow x>0)$
1) $x\geqslant 0$ **2)** $x\leqslant 0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

441. **a)** $\underset{x}{\exists} (x>0\Rightarrow -x>0)$ **b)** $\underset{x}{\exists} (x>0\Rightarrow |x|>0)$
c) $\underset{x}{\exists} (-x>0\Rightarrow x>0)$ **d)** $\underset{x}{\exists} (|x|>0\Rightarrow x>0)$
1) $x\geqslant 0$ **2)** $x\leqslant 0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

442. **a)** $\underset{y}{\forall}\ x>y^2$ **b)** $\underset{y}{\exists}\ x>y^2$ **c)** $\underset{y}{\forall}\ x<y^2$ **d)** $\underset{y}{\exists}\ x<y^2$
1) $x<0$ **2)** $x>0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

443. **a)** $\underset{y}{\forall}\ x=y$ **b)** $\underset{y}{\exists}\ x=y$ **c)** $\underset{y}{\forall}\ x\neq y$ **d)** $\underset{y}{\exists}\ x\neq y$
1) $x=0$ **2)** $x>0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

444. **a)** $\underset{y}{\forall}\ x^2=-y^2$ **b)** $\underset{y}{\exists}\ x^2=-y^2$ **c)** $\underset{y}{\forall}\ x^2\neq -y^2$ **d)** $\underset{y}{\exists}\ x^2\neq -y^2$
1) $x=0$ **2)** $x\neq 0$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

445. **a)** $\underset{y}{\forall}\ xy=y$ **b)** $\underset{y}{\exists}\ xy=y$ **c)** $\underset{y}{\forall}\ xy=x$ **d)** $\underset{y}{\exists}\ xy=x$
1) $x=0$ **2)** $x=1$ **3)** PRAWDA **4)** FAŁSZ

446. Czy jest prawdą, że
a) $\underset{x}{\forall}\ (x=3\Rightarrow x=5)$
b) $\underset{x}{\exists}\ (x=5\Rightarrow x=3)$
c) $\underset{x}{\forall}\ (x^2>-4\Rightarrow x^2>-1)$
d) $\underset{x}{\exists}\ (x^2>-1\Rightarrow x^2=25)$
e) $\underset{x}{\exists}\ (x^2>-1\Rightarrow x<-1)$
f) $\underset{x}{\exists}\ (x^2<-1\Rightarrow x>-1)$
g) $\underset{x}{\forall}\ (x^2<-1\Rightarrow x<-1)$
h) $\underset{x}{\forall}\ (x^2>-1\Rightarrow x>-1)$

447. Dla których liczb naturalnych k spełniony jest podany warunek?
a) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(m>1\wedge n>1\wedge k=mn)$
b) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(m>1\wedge n>1\wedge k=m+n)$
c) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(m>1\wedge n>1\wedge k=m-n)$
d) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(m>1\wedge n>1\wedge k=6m-2n)$
e) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}\left(m>1\wedge n>1\wedge k+2mn=m^2+n^2\right)$
f) $\underset{m}{\forall}\underset{n}{\forall}(k=mn\Rightarrow m+n=6)$
g) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(k=mn\Rightarrow m+n=6)$
h) $\underset{m}{\forall}\underset{n}{\forall}(k=mn\wedge m+n=6)$
i) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(k=mn\wedge m+n=6)$
j) $\underset{m}{\forall}\underset{n}{\forall}(k=mn\vee m+n=6)$
k) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(k=mn\vee m+n=6)$
l) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}\left(k=mn\wedge m=n^2\right)$
m) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(k=mn\wedge m=nk)$
n) $\underset{m}{\exists}\underset{n}{\exists}(km=n\wedge m=nk)$