Rozwiązania niektórych zadań z listy 13.

737. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$2^{33}\cdot n\leqslant 2^n+2^{38}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 32$.

Dla $n\leqslant 32$ zachodzą nierówności
$$2^{33}\cdot n\leqslant 2^{33}\cdot 32=2^{33}\cdot 2^5=2^{38}<2^n+2^{38}\,,$$
skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 33$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=33$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:
$$L=2^{33}\cdot 33\,,$$
$$P=2^{33}+2^{38}=2^{33}+2^5\cdot 2^{33}=2^{33}+32\cdot 2^{33}=33\cdot 2^{33}\,,$$
skąd $L=P$.

2° Niech $n\geqslant 33$ będzie taką liczbą naturalną, że
$$2^{33}\cdot n\leqslant 2^n+2^{38}\,.$$
W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność
$$2^{33}\cdot(n+1)\leqslant 2^{n+1}+2^{38}\,.$$
Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 33$ otrzymujemy
$$L=2^{33}\cdot(n+1)=2^{33}\cdot n+2^{33}\leqslant 2^n+2^{38}+2^{33}\leqslant 2^n+2^{38}+2^n=2^{n+1}+2^{38}=P\,,$$
co kończy dowód indukcyjny.

738. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\ln(1+x)}{1-\cos x} & \text{dla}\quad x\neq 0\\ A & \text{dla}\quad x=0\end{cases}$$
jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy
$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h-\ln(1+h)}{1-\cos h}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-\ln(1+h)-A+A\cos h}{h-h\cos h}\,. \qquad (1)$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+h}-A\sin h}{1-\cos h+h\sin h}\,. \tag{2}$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(1+h)^2}-A\cos h}{2\sin h+h\cos h}\,. \tag{3}$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-2}{(1+h)^3}+\sin h}{3\cos h-h\sin h}=\frac{-2}{3}\,. \tag{4}$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=1$ i wówczas $f'(0)=-2/3$.

739. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+A)^2}+\frac{\sqrt{n^2+7}}{(n+A)^2+1}+\frac{\sqrt{n^2+14}}{(n+A)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+21}}{(n+A)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+28}}{(n+A)^2+4}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+7)^2-21}}{(n+B)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+7)^2-14}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+7)^2-7}}{(n+B)^2-1}+\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A<B$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2}=\frac{\sqrt{n^2+14n+49}}{n^2+2Bn+B^2}=\frac{\sqrt{n^2+7\cdot(2n+7)}}{n^2+2An+A^2+(2(B-A)n+B^2-A^2)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k}\,, \tag{5}$$

gdzie

$$N(n)=2n+7=2(B-A)n+B^2-A^2\,, \tag{6}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1=2n+8$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (6) muszą być równe.

Aby prawa równość (6) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\left\{\begin{array}{lcl}2&=&2\cdot(B-A)\\ 7&=&B^2-A^2\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl}1&=&B-A\\ 7&=&(B-A)\cdot(B+A)\end{array}\right.$$

Dzieląc stronami drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy $7=A+B$, co prowadzi do $A=3$ i $B=4$.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (5) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(2n+8)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{2n+7}\frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+3)^2+k} \leqslant (2n+8)\cdot\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+3)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(2n+8)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2}=\frac{(2n+8)\cdot n}{(n+4)^2}=\frac{2+\frac{8}{n}}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^2}\to 2$$

oraz

$$(2n+8)\cdot\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+3)^2}=\frac{(2n+8)\cdot(n+7)}{(n+3)^2}=\frac{\left(2+\frac{8}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{7}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}\to 2\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 2.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=3$, $B=4$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 2.

740. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=9\,.$$

Rozwiązanie:

Niech q będzie ilorazem szeregu geometrycznego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Wówczas dodatniość wyrazów i zbieżność szeregu pociągają nierówności $a_1>0$ oraz $0<q<1$, a wyrazy szeregu wyrażają się wzorem $a_n=a_1q^{n-1}$. Ponadto ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a_1}{1-q}\,.$$

Ponieważ wyrazy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

wyrażają się wzorem

$$a_n^2=a_1^2\cdot\left(q^2\right)^{n-1},$$

szereg ten jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1^2 i ilorazie q^2. Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=\frac{a_1^2}{1-q^2}\,.$$

Zatem warunki podane w treści zadania przyjmują postać

$$\frac{a_1}{1-q}=\frac{a_1^2}{1-q^2}=9\,,$$

co po przekształceniu prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a_1 &= 9\cdot(1-q) \\ a_1^2 &= 9\cdot(1-q)\cdot(1+q) \end{cases}$$

Podstawienie $a_1=9\cdot(1-q)$ do drugiego równania daje

$$81\cdot(1-q)^2=9\cdot(1-q)\cdot(1+q)\,,$$

skąd po uwzględnieniu $q\neq 1$ i podzieleniu obustronnie przez $9\cdot(1-q)$ otrzymujemy kolejno

$$9-9q=q+1\,,$$

$$q=4/5, \qquad a_1=9/5\,.$$

Odpowiedź: Jedynym szeregiem geometrycznym spełniającym warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9\cdot 4^{n-1}}{5^n}\,.$$

741. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{12}+n}-n^6}{\left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{12}+n}-n^6}{\left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^{12}+n}+n^6}\cdot\left(\frac{\sqrt{n^4+n}+n^2}{n}\right)^k=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-5}}{\sqrt{1+n^{-11}}+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+n^{-3}}+1}{n^{-1}}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-3}}+1\right)^k}{\sqrt{1+n^{-11}}+1}\cdot\frac{n^{-5}}{n^{-k}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n^{-3}}+1\right)^k}{\sqrt{1+n^{-11}}+1}\cdot n^{k-5}=\frac{2^k}{2}=2^{k-1}\,,$$

o ile $k-5=0$, czyli $k=5$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 16 dla $k=5$.

W każdym z kolejnych 10 zadań podaj w postaci uproszczonej kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

742. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 2^{2^m}=4^{4^n}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{2}$ (**NIE**) $\sup Z=\mathbf{3}$ (**TAK**)

743. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 2^{2^m}=16^{16^n}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{4}$ (**NIE**) $\sup Z=\mathbf{6}$ (**TAK**)

744. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 4^{4^m}=16^{16^n}\right\}$

$\inf Z=+\infty$ (**NIE**) $\sup Z=-\infty$ (**NIE**)

745. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \wedge 3^{3^m}=27^{27^n}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{3}$ (**NIE**) $\sup Z=\mathbf{4}$ (**TAK**)

746. $Z=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2-41}: n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-1/5}$ (**TAK**) $\sup Z=\mathbf{1/16}$ (**TAK**)

747. $Z=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2-43}: n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-1/6}$ (**TAK**) $\sup Z=\mathbf{1/18}$ (**TAK**)

748. $Z=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2-45}: n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-1/4}$ (**TAK**) $\sup Z=\mathbf{1/19}$ (**TAK**)

749. $Z=\left\{\frac{x}{4}-\operatorname{arctg}x: x\in[0,+\infty)\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}}$ (**TAK**) $\sup Z=+\infty$ (**NIE**)

750. $Z=\left\{\frac{x}{2}-\operatorname{arctg}x: x\in[0,+\infty)\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}}$ (**TAK**) $\sup Z=+\infty$ (**NIE**)

751. $Z=\left\{\frac{3x}{4}-\operatorname{arctg}x: x\in[0,+\infty)\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}}$ (**TAK**) $\sup Z=+\infty$ (**NIE**)