Kolokwium nr 10: poniedziałek 13.01.2020, godz. 10:15-11:00, materiał zad. 1–615.

Poziom standardowy (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

10. Pochodna funkcji. Twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Pomoc w rozwiązaniu tych zadań można uzyskać na ćwiczeniach grupy 5 w czwartki 19.12.2019 i 9.01.2020 — nie będą omawiane na ćwiczeniach grup 1, 2, 4.

Obliczyć pochodną funkcji zmiennej x o podanym wzorze. Podać, w jakim zbiorze istnieje pochodna. Rozstrzygnąć istnienie pochodnych jednostronnych w punktach nieróżniczkowalności.

Uwaga: $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

551. $3x^{33}-5x+1$ **552.** $(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$ **553.** $(1+\sqrt{x})(1+x^{1/3})(1+x^{1/4})$

554. $\frac{1-x^3}{1+x^3}$ **555.** $(x^5+1)^{20}$ **556.** $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{1/3}$ **557.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$ **558.** $x10^x$

559. $\frac{x}{e^x}$ **560.** $x^2(x+1)e^x$ **561.** e^{x^2} **562.** e^{e^x} **563.** 10^{2x-3} **564.** 2^{3^x} **565.** $|x|^3$

566. $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ **567.** $x^5(x^6-8)^{1/3}$ **568.** $e^{2x+3}\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)$ **569.** $\frac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$

570. $\operatorname{sgn}(x)$ **571.** 0 dla $x<0$, x^2 dla $x\geqslant 0$ **572.** x dla $x<0$, x^2 dla $x\geqslant 0$

573. $e^{-|x|}$ **574.** $\{x\}$ **575.** $\{x\}^3$ **576.** e^e **577.** $\frac{\pi^{10}}{x-e}$

578. e^x dla $x<0$, $1+x$ dla $x\geqslant 0$ **579.** x^7+e^2 **580.** $(x+e)^{20}$ **581.** $\operatorname{sgn}(x^5-x^3)$

582. $e^x\ln x$ **583.** $\frac{\ln x}{e^x}$ **584.** $x^{10}\ln x$ **585.** $\ln\ln x$ **586.** $\ln\frac{1}{1+x}$

587. $\log_{10}(x-1)$ **588.** $\log_2|\log_3(\log_5 x)|$ **589.** $e^{\sqrt{\ln x}}$ **590.** $e^{-x^2}\ln x$

591. Niech $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{dla} \quad x\neq 2 \\ x^2 & \text{dla} \quad x=2 \end{cases}$

Obliczyć $f'(2)$.

Zadania na ćwiczenia 16,19.12.2019, 7,9.01.2020 (grupy 1, 2, 4).

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

592. Niech $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. Korzystając **z definicji** pochodnej obliczyć $f'(8)$.

593. Niech $f(x)=x^5$. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na $f'(x)$.

594. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

595. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

596. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.
Uwaga: W tym i poprzednich zadaniach nie wolno korzystać z reguły de l'Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej.

597. Korzystając ze wzorów na pochodną iloczynu i złożenia funkcji oraz ze znajomości pochodnych funkcji potęgowych wyprowadzić wzór na pochodną ilorazu.

598. Obliczyć pochodną funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}\,.$$

Podać, w jakim zbiorze istnieje pochodna. Rozstrzygnąć istnienie pochodnych jednostronnych w punktach nieróżniczkowalności.

599. Wyznaczyć punkt przecięcia stycznej do wykresu funkcji $f(x)=x^2$ w punkcie $(2,4)$ z osią OY.

600. Wyznaczyć punkt przecięcia stycznej do wykresu funkcji $f(x)=e^x$ w punkcie $(0,1)$ z osią OX.

601. Wyznaczyć punkt przecięcia prostych stycznych do wykresu funkcji $f(x)=x^3$ w punktach $(-1,-1)$ i $(2,8)$.

602. Wyprowadzić wzór na pochodną funkcji

$$f(x)=\frac{7+\sin^4 x-\sin^2 x}{7+\cos^4 x-\cos^2 x}\,.$$

Doprowadzić wzór na pochodną do możliwie najprostszej postaci.

Obliczyć pochodną funkcji zmiennej x o podanym wzorze. Podać, w jakim zbiorze istnieje pochodna.
Wskazówka: $A^B=e^{B\ln A}$.

603. x^{x^2} **604.** $x^{\sqrt{x}}$ **605.** $(\ln x)^x$ **606.** x^{x^x}

607. Wyznaczyć równanie prostej, która jest styczna do obydwu następujących parabol: paraboli o równaniu $y=x^2$ oraz paraboli o równaniu $y=x^2-8x$.

608. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^5}$ jest różniczkowalna w zerze.

609. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^6}$ jest różniczkowalna w zerze.

610. W każdym z zadań **610.1-610.7** podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

610.1. $f_1(x)=\ln\left(x^3+1\right)$

$f_1'(1)=$ .... $f_1'(2)=$ .... $f_1'(3)=$ ....

610.2. $f_2(x)=\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$

$f_2'(1)=$ .... $f_2'(2)=$ .... $f_2'(3)=$ ....

610.3. $f_3(x)=\sqrt{24x+1}$

$f_3'(0)=$ .... $f_3'(1)=$ .... $f_3'(2)=$ ....

610.4. $f_4(x)=\sqrt[3]{x^3-x+8}$

$f_4'(-1)=$ .... $f_4'(0)=$ .... $f_4'(1)=$ ....

610.5. $f_5(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^4-x^2+9}}$

$f_5'(-1)=$ .... $f_5'(0)=$ .... $f_5'(1)=$ ....

610.6. $f_6(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^5-x+32}}$

$f_6'(-1)=$ .... $f_6'(0)=$ .... $f_6'(1)=$ ....

610.7. $f_7(x)=\sqrt{8x+1}\cdot\sqrt[3]{7x^2+1}$

$f_7'(0)=$ .... $f_7'(1)=$ .... $f_7'(3)=$ ....

611. W każdym z zadań **611.1-611.7** dla podanej funkcji $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ podaj wartości pochodnych jednostronnych funkcji f_i w zerze.

611.1. $f_1(x)=\sqrt{\sqrt{2x^2+1}-1}$	$f_1'(0^-)=$	$f_1'(0^+)=$ ....
611.2. $f_2(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+4}-2}$	$f_2'(0^-)=$	$f_2'(0^+)=$ ....
611.3. $f_3(x)=\sqrt{\sqrt{8x^2+81}-9}$	$f_3'(0^-)=$	$f_3'(0^+)=$ ....
611.4. $f_4(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x^2+1}-1}$	$f_4'(0^-)=$	$f_4'(0^+)=$ ....
611.5. $f_5(x)=\sqrt{\sqrt[4]{2x^2+1}-1}$	$f_5'(0^-)=$	$f_5'(0^+)=$ ....
611.6. $f_6(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x^2+16}-2}$	$f_6'(0^-)=$	$f_6'(0^+)=$ ....
611.7. $f_7(x)=\sqrt{\sqrt[4]{8x^2+81}-3}$	$f_7'(0^-)=$	$f_7'(0^+)=$ ....

612. W każdym z zadań **612.1-612.4** funkcja $g_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej podanym wzorem. W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji g_i w trzech podanych punktach.

612.1. $f_1(x)=x^3+x$

$g_1'(0)=$ .... $g_1'(2)=$ .... $g_1'(130)=$ ....

612.2. $f_2(x)=x^7+x$

$g_2'(0)=$ .... $g_2'(2)=$ .... $g_2'(130)=$ ....

612.3. $f_3(x)=x^3+5x$

$g_3'(0)=$ .... $g_3'(6)=$ .... $g_3'(42)=$ ....

612.4. $f_4(x)=x^5+5x$

$g_4'(0)=$ .... $g_4'(6)=$ .... $g_4'(42)=$ ....

Zadania na konwersatorium w poniedziałek 7.01.2020 (godz. 8–10, EM).

613. Funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x)=1+x+2\sqrt{x}$. Funkcja g jest złożeniem 100 egzemplarzy funkcji f: $g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots)))$. Obliczyć $g'(100)$.

614. Na potrzeby tego zadania funkcję $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nazwiemy **trefloróżniczkowalną** w punkcie x_0, jeżeli istnieje granica

$$f^{\clubsuit}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h},$$

którą to granicę nazywać będziemy **treflopochodną** funkcji f w punkcie x_0.

a) Dowieść, że jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest *trefloróżniczkowalna* w x_0 i wyrazić $f^{\clubsuit}(x_0)$ w zależności od $f'(x_0)$.

b) Podać przykład funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *trefloróżniczkowalnej* w zerze, która nie jest różniczkowalna w zerze. Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

W następującym zadaniu wykorzystać twierdzenie Lagrange'a oraz własność Darboux funkcji ciągłych (przypomnienie: funkcja różniczkowalna jest ciągła).

615. Funkcje $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{12}$ są określone i różniczkowalne na całej prostej rzeczywistej, a ich pochodne są ciągłe. Ponadto

$f_1(3)=1,\ \ f_1(5)=2,$

$f_2(0)=3,\ \ f_2(4)=-1,$

$f_3(-5)=0,\ \ f_3(15)=10,$

$f_4(1)=2,\ \ \underset{x}{\forall} f_4'(x)\neq 1,$

$f_5(0)=0,\ \ f_5(2)=10,\ \ \underset{x}{\forall} f_5'(x)\neq 2,$

$f_6(0)=7,\ \ \underset{x}{\forall} f_6'(x)>2,$

$f_7(3)=5,\ \ \underset{x}{\forall} f_7'(x)\geqslant -1,$

$f_8(-2)=0,\ \ f_8(0)=10,\ \ f_8(3)=4,$

$f_9(-1)=0,\ \ f_9(1)=100,\ \ f_9'(3)=40,$

$f_{10}(1)=-5,\ \ f_{10}(11)=5,\ \ \underset{x}{\forall}\ 0<f_{10}'(x)<2,$

$f_{11}(0)=0,\ \ f_{11}(100)=0,\ \ \underset{x}{\forall}\ -1<f_{11}'(x)<2,$

$f_{12}(-100)=-100,\ \ f_{12}(100)=100,\ \ \underset{x}{\forall}\ -100<f_{12}'(x)<100.$

A) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{x}{\forall}\ f_i'(x)\neq 0$$

B) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=-1$$

C) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(0)\neq 1$$

D) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(99)>0$$

E) Dowieść, że dla co najmniej dwóch funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=5$$

F) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=44$$

G) Dowieść, że dla co najmniej trzech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i'(c)=\frac{1}{2}$$

H) Dowieść, że dla co najmniej siedmiu funkcji f_i zachodzi warunek

$$f_i(1)\neq 8$$

I) Dowieść, że dla co najmniej czterech funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c}{\exists}\ f_i(c)=13$$

J) Dowieść, że dla co najmniej jednej funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c\neq d}{\exists}\ f_i(c)=f_i(d)=7$$

K) Dowieść, że dla co najmniej dziewięciu funkcji f_i zachodzi warunek

$$\underset{c,\,d}{\exists}\ f_i(c)=f_i'(d)$$