KOLOKWIUM nr 9, 16.12.2019, godz. 10:15–11:00

Zadanie **16. (10 punktów)** W każdym z zadań **16.1-16.10** podaj granicę funkcji. Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt.**

16.1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{5^{4^{3^x}}} = \mathbf{32}$

16.2. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{2^{5^{4^x}}} = \mathbf{9}$

16.3. $\lim\limits_{x\to-\infty} 4^{3^{2^{5^x}}} = \mathbf{64}$

16.4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\log_2(x+32)-\log_2(x+4)\right) = \mathbf{0}$

16.5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\log_2(32x+1)-\log_2(x+4)\right) = \mathbf{5}$

16.6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\log_2(32x+1)-\log_2(4x+1)\right) = \mathbf{3}$

16.7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \mathbf{e^2}$

16.8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{4}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \mathbf{e^8}$

16.9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \sqrt{\mathbf{e}}$

16.10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt[4]{\mathbf{e}}$

Zadanie **17.** **(10 punktów)**

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x)=x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^8+x^7+x^6+7=\left(x^4+\frac{x^3}{2}\right)^2+\frac{3x^6}{4}+7>0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\sqrt[8]{\frac{x^8+x^7+x^6+7}{x^8}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}1+\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}=1+1=2\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^8+x^7+x^6+7)-x^8}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}+x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7+x^6+7}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}+x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)}=\frac{1}{8}\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^8-t^8}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)\cdot(s^4+t^4)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[8]{x^8}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{-\sqrt[8]{x^8}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt[8]{\frac{x^8+x^7+x^6+7}{x^8}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}\right)=1-1=0\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^8+x^7+x^6+7)-x^8}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^7+x^6+7}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}}{x^2}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}}{x^4}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{-\sqrt[8]{x^8}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}}{\sqrt[4]{x^8}}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}}{\sqrt{x^8}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(-\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}-1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{(-1-1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)}=-\frac{1}{8}\,.$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^8-t^8}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)\cdot(s^4+t^4)}$$

przy $s=\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}>0$ i $t=x<0$, a więc w sytuacji, gdy $s-t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=2x+\frac{1}{8}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę poziomą o równaniu $y=-\frac{1}{8}$.

Sugerowana punktacja rozwiązań:

• **1 punkt** — Wyliczenie a w $+\infty$.

• **2 punkty** — Wyliczenie b w $+\infty$ (głównie chodzi o umiejętność zastosowania wzoru na różnicę ósmych potęg).

• **3 punkty** — Wyliczenie a w $-\infty$ (głównie chodzi o poradzenie sobie ze znakiem przy wciąganiu x pod pierwiastek 8-go stopnia).

• **3 punkty** — Wyliczenie b w $-\infty$ (głównie chodzi o odpowiednie zastosowanie wzoru na różnicę ósmych potęg i poradzenie sobie ze znakiem przy wciąganiu x pod pierwiastek 8-go stopnia).

• **1 punkt** — Stwierdzenie, że brak asymptot pionowych (z krótkim wyjaśnieniem dlaczego), zapisanie równań wyznaczonych asymptot.