KOLOKWIUM nr 8, 9.12.2019, godz. 10:15–11:00

Zadanie **14.** **(10 punktów)**

Niech funkcja $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt[16]{x}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\, y\in[1,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{16}\,.$$

Rozwiązanie:
Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności stosując czterokrotnie wzór na różnicę kwadratów[1], a następnie szacujemy korzystając z nierówności $x,\, y\geqslant 1$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[16]{x}-\sqrt[16]{y}\right|=\frac{|x-y|}{\left(\sqrt[16]{x}+\sqrt[16]{y}\right)\cdot\left(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|x-y|}{\left(\sqrt[16]{1}+\sqrt[16]{1}\right)\cdot\left(\sqrt[8]{1}+\sqrt[8]{1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{1}\right)\cdot\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)}=\frac{|x-y|}{16}\,,$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x,\, y\geqslant 1$.

[1] Można również zastosować ogólny wzór na różnicę n-tych potęg dla $n=16$.

Zadanie **15.** **(10 punktów)**

Niech $A_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{2,5}}}}}}}}}}}}$, gdzie $\sqrt{2}$ występuje n razy, a potęgowanie jak zwykle wykonujemy od góry. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n < 2,5 = \frac{5}{2}$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy indukcyjny dowód nierówności

$$A_n < \frac{5}{2}\,.$$

1° Dla $n=1$ mamy

$$A_1 = \sqrt{2}^{5/2} = \sqrt{\sqrt{32}} < \sqrt{\sqrt{36}} = \sqrt{6} = \sqrt{\frac{24}{4}} < \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}\,, \qquad (\spadesuit)$$

zatem dowodzona nierówność jest prawdziwa[2].

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$A_n < \frac{5}{2}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas

$$A_{n+1} < \frac{5}{2}\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Zauważmy, że

$$A_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{A_n},$$

wobec czego po skorzystaniu z założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) oraz z nierówności $a^x < a^y$ dla $a>1$ i $x<y$, i po uwzględnieniu udowodnionej wcześniej nierówności ($\spadesuit$), otrzymujemy

$$A_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{A_n} < \left(\sqrt{2}\right)^{5/2} = A_1 < \frac{5}{2}\,,$$

co kończy dowód nierówności ($\diamondsuit$).

Na mocy zasady indukcji dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

[2]Można też sprowadzić nierówność $A_1 < 2,5$ do postaci $2^9 < 5^4$, czyli $512 < 625$.