Egzamin, 5.02.2020, godz. 9:00-13:20

Zadanie **11. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba $\log_{(9/5)}\left(\dfrac{27}{25}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(9/5)}\left(\frac{27}{25}\right)$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są większe od 1). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(9/5)}\left(\frac{27}{25}\right)=\frac{m}{n}\,,$$

$$\left(\frac{9}{5}\right)^{m/n}=\frac{27}{25}\,,$$

$$\left(\frac{9}{5}\right)^{m}=\left(\frac{27}{25}\right)^{n}\,,$$

$$9^m\cdot 25^n=27^n\cdot 5^m\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$3^{2m}\cdot 5^{2n}=3^{3n}\cdot 5^m\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m = 3n \\ 2n = m \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że $3n=2m=4n$, skąd istnieje jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$, które nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(9/5)}\left(\frac{27}{25}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(9/5)}\left(\frac{27}{25}\right)$ jest niewymierna.

Zadanie **12. (10 punktów)**
Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{3x}-e^{2x}-\ln(1+x)}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{3h}-e^{2h}-\ln(1+h)}{h^2}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{3h}-e^{2h}-\ln(1+h)-Ah^2}{h^3}\,. \quad (1)$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{3e^{3h}-2e^{2h}-\frac{1}{1+h}-2Ah}{3h^2}\,. \quad (2)$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{9e^{3h}-4e^{2h}+\frac{1}{(1+h)^2}-2A}{6h}\,. \quad (3)$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{6-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=3$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{27e^{3h}-8e^{2h}-\frac{2}{(1+h)^3}}{6}=\frac{17}{6}\,. \quad (4)$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=3$ i wówczas $f'(0)=17/6$.

Zadanie **13. (10 punktów)**
Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+1}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+2}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+3}-n^2}+\ldots\right.$$
$$\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+k}-n^2}+\ldots$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-2}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-1}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n}-n^2}\right).$$

Rozwiązanie:
Przekształcamy i szacujemy wyrażenie pod znakiem granicy (uwzględniając, że jest to suma złożona z $n+1$ składników), a następnie przechodzimy z n do $+\infty$ w oszacowaniach dolnym i górnym:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+k}-n^2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{n^4+n^3+k}+n^2}{n^4+n^3+k-n^4}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{n^4+n^3+k}+n^2}{n^3+k},$$
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{n^4+n^3+k}+n^2}{n^3+k}\geqslant(n+1)\cdot\frac{\sqrt{n^4+0+0}+n^2}{n^3+n}\to 2,$$
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{n^4+n^3+k}+n^2}{n^3+k}\leqslant(n+1)\cdot\frac{\sqrt{n^4+n^3+n}+n^2}{n^3+0}\to 2.$$

Ponieważ oszacowania dolne i górne dążą do wspólnej granicy równej 2, na mocy twierdzenia o trzech ciągach dana w zadaniu granica istnieje i ma wartość 2.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 2.

Zadanie **14.** **(10 punktów)**

Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunki

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 15\,.$$

Rozwiązanie:

Niech q będzie ilorazem szeregu geometrycznego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Wówczas dodatniość wyrazów i zbieżność szeregu pociągają nierówności $a_1>0$ oraz $0<q<1$, a wyrazy szeregu wyrażają się wzorem $a_n=a_1q^{n-1}$. Ponadto ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}\,.$$

Ponieważ wyrazy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

wyrażają się wzorem

$$a_n^2 = a_1^2 \cdot \left(q^2\right)^{n-1}\,,$$

szereg ten jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1^2 i ilorazie q^2. Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{a_1^2}{1-q^2}\,.$$

Zatem warunki podane w treści zadania przyjmują postać

$$\frac{a_1}{1-q}=5 \qquad \text{oraz} \qquad \frac{a_1^2}{1-q^2}=15\,,$$

co po przekształceniu prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a_1 &=& 5\cdot(1-q) \\ a_1^2 &=& 15\cdot(1-q)\cdot(1+q) \end{cases}$$

Podstawienie $a_1=5\cdot(1-q)$ do drugiego równania daje

$$25\cdot(1-q)^2 = 15\cdot(1-q)\cdot(1+q)\,,$$

skąd po uwzględnieniu $q\neq 1$ i podzieleniu obustronnie przez $5\cdot(1-q)$ otrzymujemy kolejno

$$5-5q=3q+3\,,$$

$$q=1/4, \qquad a_1=15/4\,.$$

Odpowiedź: Jedynym szeregiem geometrycznym spełniającym warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{15}{4^n}\,.$$

Zadanie **15.** **(10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x^2-\sqrt{4x^2+4x+1}$$

na przedziale $[-3,\,3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\sqrt{4x^2+4x+1}=\sqrt{(2x+1)^2}=|2x+1|=\begin{cases} 2x+1 & \text{dla} \quad x\in[-1/2,\,+\infty) \\ -2x-1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-1/2) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1 & \text{dla} \quad x\in[-1/2,\,3] \\ x^2+2x+1 & \text{dla} \quad x\in[-3,\,-1/2) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-3,\,3]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{dla} \quad x\in(-1/2,\,3) \\ 2x+2 & \text{dla} \quad x\in(-3,\,-1/2) \end{cases}$$

W punkcie $-1/2$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-1/2,\,3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $2x-2=0$, co ma rozwiązanie $x=1$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/2,\,3)$.

2° W przypadku $x\in(-3,\,-1/2)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x+2=0$, co ma rozwiązanie $x=-1$, które należy do rozważanego przedziału $(-3,\,-1/2)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -3 i 3,
- miejsca zerowe pochodnej: -1 i 1,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/2$.

$$f(-3)=4\,,$$
$$f(-1)=0\,,$$
$$f(-1/2)=1/4=0,25\,,$$
$$f(1)=-2\,,$$
$$f(3)=2\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -2 w punkcie 1, a wartość największą równą 4 w punkcie -3.

Zadanie **16.** **(10 punktów)**

W każdym z zadań **16.1-16.5** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty=\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy (ale co najmniej jeden w postaci rażąco nieuproszczonej) i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

16.1. $A=\left\{\frac{1}{n^2-26}:n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf A=\mathbf{-1}$ $\sup A=\mathbf{1/10}$

Czy kres dolny należy do zbioru A **TAK** Czy kres górny należy do zbioru A **TAK**

16.2. $B=\left\{\frac{1}{n^3-26}:n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf B=\mathbf{-1/18}$ $\sup B=\mathbf{1}$

Czy kres dolny należy do zbioru B **TAK** Czy kres górny należy do zbioru B **TAK**

16.3. $C=\left\{\frac{1}{2^n-26}:n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf C=\mathbf{-1/10}$ $\sup C=\mathbf{1/6}$

Czy kres dolny należy do zbioru C **TAK** Czy kres górny należy do zbioru C **TAK**

16.4. $D=\left\{\frac{1}{3^n-26}:n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf D=\mathbf{-1/17}$ $\sup D=\mathbf{1}$

Czy kres dolny należy do zbioru D **TAK** Czy kres górny należy do zbioru D **TAK**

16.5. $E=\left\{\frac{1}{5^n-26}:n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf E=\mathbf{-1}$ $\sup E=\mathbf{1/99}$

Czy kres dolny należy do zbioru E **TAK** Czy kres górny należy do zbioru E **TAK**

Zadanie **21. (10 punktów)**

Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{x}-10\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(1600)+f(1602)=-\mathbf{67{,}54267816}...\qquad\text{czy}\qquad 2\cdot f(1601)=-\mathbf{67{,}54267816}...\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{10}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{10}{x^2}\,,$$

skąd nierówność $f''(x)<0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{10}{x^2}<0\,,$$

$$\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}>\frac{10}{x^2}\,,$$

$$\sqrt{x}>40\,,$$

$$x>1600\,.$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[1600;+\infty)$, skąd

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

czyli

$$f(x)+f(y)<2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y\geqslant 1600$.

W szczególności

$$f(1600)+f(1602)<2\cdot f(1601)\,.$$

Zadanie **22.** **(10 punktów)**

Niech $A_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$, gdzie $\sqrt{}$ oraz 2 występują po n razy. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n<2$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy indukcyjny dowód nierówności

$$A_n<2\,.$$

1° Dla $n=1$ mamy

$$A_1=\sqrt{2}<2\,,$$

zatem dowodzona nierówność jest prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$A_n<2\,. \qquad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas

$$A_{n+1}<2\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Zauważmy, że

$$A_{n+1}=\sqrt{2+A_n},$$

wobec czego po skorzystaniu z założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) otrzymujemy

$$A_{n+1}=\sqrt{2+A_n}<\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2\,,$$

co kończy dowód nierówności ($\diamondsuit$).

Na mocy zasady indukcji dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Zadanie **23. (10 punktów)**

Dana jest funkcja $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt{2x^2+2}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[-1,1]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\ .$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|\ ,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x\in[-1,1]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)|\leqslant 1\,. \tag{5}$$

Dla $x=0$ powyższa nierówność jest oczywista wobec $f'(0)=0$, a dla $x\neq 0$ bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x|\leqslant 1$ prowadzą do:

$$|f'(x)|=\left|\frac{2x}{\sqrt{2x^2+2}}\right|=\frac{2\cdot|x|}{\sqrt{2x^2+2}}=\frac{2}{\sqrt{2+\frac{2}{x^2}}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{2+\frac{2}{1^2}}}=\frac{2}{\sqrt{4}}=\frac{2}{2}=1\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie **24. (10 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-9}$.

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{4n^2-9} = \frac{1}{(2n-3)(2n+3)} = \frac{A}{2n-3} + \frac{B}{2n+3}.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(2n-3)(2n+3)$ otrzymujemy

$$1 = A(2n+3) + B(2n-3). \qquad (*)$$

Dla $n=3/2$ otrzymujemy $A=1/6$, natomiast przyjęcie $n=-3/2$ daje $B=-1/6$.

Inny sposób: porównując w równaniu (*) współczynniki przy n oraz wyrazy wolne dostajemy układ równań i go rozwiązujemy.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4n^2-9} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{15}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{2N-7}-\frac{1}{2N-1}\right)+\left(\frac{1}{2N-5}-\frac{1}{2N+1}\right)+\left(\frac{1}{2N-3}-\frac{1}{2N+3}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{-1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2N+1}-\frac{1}{2N+3}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2N+1}-\frac{1}{2N+3}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/18$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/18$.

Zadanie **25. (10 punktów)**
Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z=\left\{\sqrt{n^2+9n+20}-n:\, n\in\mathbb{N}\right\}\,.$$

Rozwiązanie:
Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\sqrt{n^2+9n+20}-n=\sqrt{n^2+9n+20}-\left(n+\frac{9}{2}\right)+\frac{9}{2}=\frac{n^2+9n+20-\left(n+\frac{9}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2+9n+20}+\left(n+\frac{9}{2}\right)}+\frac{9}{2}=$$

$$=\frac{n^2+9n+20-n^2-9n-\frac{81}{4}}{\sqrt{n^2+9n+20}+\left(n+\frac{9}{2}\right)}+\frac{9}{2}=-\frac{1/4}{\sqrt{n^2+9n+20}+\left(n+\frac{9}{2}\right)}+\frac{9}{2}\,.$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie rośnie wraz z n, a przy $n\to\infty$ dąży do $9/2$.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu rosnącym pierwszy wyraz (tu równy $\sqrt{30}-1$) jest najmniejszy, a kresem górnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź:
Kres dolny danego zbioru jest równy $\sqrt{30}-1\approx 4,48$, a kres górny $9/2=4,5$.

Zadanie **26.** **(10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ zachodzi nierówność

$$n^{n+1} > (n+1)^n .$$

Rozwiązanie:

Dana w zadaniu nierówność jest równoważna nierówności

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} ,$$

czyli

$$f(n) > f(n+1) , \tag{$*$}$$

gdzie

$$f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{1/x} .$$

Ponieważ jednak

$$f'(x) = x^{1/x} \cdot \frac{d}{dx} \ln x^{1/x} = x^{1/x} \cdot \frac{d}{dx} \frac{\ln x}{x} = \sqrt[x]{x} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} < 0 \qquad \text{dla} \qquad x > e ,$$

funkcja f jest malejąca w przedziale $(e, +\infty)$, skąd otrzymujemy $(*)$ dla $n \geqslant 3$.

Zadanie **31. (10 punktów)**
Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru

$$Z=\left\{\frac{m^2n^2}{m^3+4n^6}:m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:
Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowanej do trzech liczb: $m^3/2$, $m^3/2$, $4n^6$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{\frac{m^3}{2}\cdot\frac{m^3}{2}\cdot 4n^6}\leqslant\frac{m^3+4n^6}{3},$$

czyli

$$\frac{m^2n^2}{m^3+4n^6}\leqslant\frac{1}{3}.$$

Zatem liczba $1/3$ jest ograniczeniem górnym zbioru Z. Wykażemy, że jest to ograniczenie najmniejsze. W tym celu przyjmijmy $m=2$ oraz $n=1$. Wówczas

$$\frac{m^2n^2}{m^3+4n^6}=\frac{4}{8+4}=\frac{1}{3}$$

jest elementem zbioru Z.

Odpowiedź: Kres górny zbioru Z jest równy $1/3$.

Zadanie **32. (10 punktów)**
Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k\cdot\binom{n}{k}}{3^n+2^k}\,.$$

Rozwiązanie:
Szacujemy wyrażenie pod znakiem granicy, korzystamy z równości

$$\sum_{k=0}^{n}2^k\cdot\binom{n}{k}=(2+1)^n=3^n\,,$$

a następnie przechodzimy z n do $+\infty$ w oszacowaniach dolnym i górnym:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k\cdot\binom{n}{k}}{3^n+2^k}\geqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k\cdot\binom{n}{k}}{3^n+2^n}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}2^k\cdot\binom{n}{k}}{3^n+2^n}=\frac{3^n}{3^n+2^n}=\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}\to 1\,,$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k\cdot\binom{n}{k}}{3^n+2^k}\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k\cdot\binom{n}{k}}{3^n+0}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}2^k\cdot\binom{n}{k}}{3^n}=\frac{3^n}{3^n}=1\to 1\,.$$

Ponieważ oszacowania dolne i górne dążą do wspólnej granicy równej 1, na mocy twierdzenia o trzech ciągach dana w zadaniu granica istnieje i ma wartość 1.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 1.

Zadanie **33. (10 punktów)**

Dany jest szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich spełniający warunki

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 8 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 < 8\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < 8\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_n^3} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_n^3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 < \frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 8\,.$$

Zadanie **34. (10 punktów)**

Dany jest szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich spełniający warunki

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 4 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 < 16\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < 8\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2a_n \cdot \frac{a_n^3}{2}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n + \frac{a_n^3}{2}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 < 4 + \frac{1}{4} \cdot 16 = 8\,.$$

Zadanie **35. (10 punktów)**

Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych $n \geqslant 2$, że liczba

$$\sum_{k=2}^{n} \log_2 \log_k (k+1)$$

jest wymierna.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy $n=2^{2^m}-1$, gdzie m jest liczbą naturalną. Wówczas korzystając z równości $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ otrzymujemy

$$\sum_{k=2}^{n} \log_2 \log_k (k+1) = \log_2 \prod_{k=2}^{n} \log_k (k+1) = \log_2 \log_2 (n+1) = \log_2 \log_2 2^{2^m} = m\,.$$

Zadanie **36. (10 punktów)**

Niech $f(x)=\sqrt[3]{x^2+432}$. Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(36,001)=f(36001/1000)\approx \mathbf{12,0001666666667}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{72001}{6000}=12+\frac{1}{6000}\approx \mathbf{12,0001666666667}\,.$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{2x}{3\cdot\left(x^2+432\right)^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{2}{3\cdot\left(x^2+432\right)^{2/3}}-\frac{8x^2}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}=\frac{6\cdot\left(x^2+432\right)}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}-\frac{8x^2}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}=$$

$$\frac{6x^2+6\cdot 432-8x^2}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}=\frac{-2x^2+2\cdot 36^2}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}=\frac{2\cdot\left(-x^2+36^2\right)}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}<0$$

dla $x>36$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[36,\,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>36$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 36. Ponieważ $f(36)=12$ oraz $f'(36)=1/6$, dla $x>36$ zachodzi nierówność $f(x)<12+(x-36)/6$ i w konsekwencji

$$f(36,001)<12+\frac{0,001}{6}=12+\frac{1}{6000}=\frac{72000}{6000}+\frac{1}{6000}=\frac{72001}{12}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(36,001)$ jest mniejsza od $72001/6000$.