471. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których całka niewłaściwa $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^p}{x^\pi + x^e}\, dx$ jest zbieżna.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x^p}{x^\pi + x^e}\, dx = \int\limits_0^{1} \frac{x^p}{x^\pi + x^e}\, dx + \int\limits_1^{\infty} \frac{x^p}{x^\pi + x^e}\, dx\,.$$

Zbadamy, dla których wartości parametru p całki występujące w powyższej sumie są zbieżne. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int\limits_0^{1} \frac{x^p}{x^\pi + x^e}\, dx \leqslant \int\limits_0^{1} \frac{x^p}{0 + x^e}\, dx = \int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^{e-p}} < +\infty\,,$$

o ile $e-p<1$, czyli $p>e-1$.

Ponadto

$$\int\limits_0^{1} \frac{x^p}{x^\pi + x^e}\, dx \geqslant \int\limits_0^{1} \frac{x^p}{x^e + x^e}\, dx = \frac{1}{2}\cdot \int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^{e-p}} = +\infty\,,$$

o ile $e-p\geqslant 1$, czyli $p\leqslant e-1$.

Podobnie

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{x^p}{x^\pi + x^e}\, dx \leqslant \int\limits_1^{\infty} \frac{x^p}{x^\pi + 0}\, dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\pi-p}} < +\infty\,,$$

o ile $\pi-p>1$, czyli $p<\pi-1$.

Ponadto

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{x^p}{x^\pi + x^e}\, dx \geqslant \int\limits_1^{\infty} \frac{x^p}{x^\pi + x^\pi}\, dx = \frac{1}{2}\cdot \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\pi-p}} = +\infty\,,$$

o ile $\pi-p\leqslant 1$, czyli $p\geqslant \pi-1$.

Wniosek: Jeżeli $e-1<p<\pi-1$, to obydwie całki powstałe z podziału przedziału całkowania są zbieżne, a więc i wyjściowa całka jest zbieżna. W przeciwnym razie jedna z tych całek jest rozbieżna, a zatem wyjściowa całka jest rozbieżna.

Odpowiedź: Podana całka jest zbieżna dla $p\in(e-1,\, \pi-1)$.

472. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+2}$.

Starannie sformułuj kryteria, z których korzystasz i szczegółowo je uzasadnij.

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, które wymaga spełnienia następujących trzech warunków:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.

Spełnienie tego warunku jest oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
Sprawdzamy to następująco:

$$\frac{n}{n^2+2}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}\to\frac{0}{1+0}=0\,.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.
W celu udowodnienia tego warunku udowodnimy nierówność

$$\frac{n}{n^2+2}\geqslant\frac{n+1}{(n+1)^2+2}\,,$$

która jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$n\cdot\left(n^2+2n+3\right)\geqslant(n+1)\cdot\left(n^2+2\right)\,,$$

$$n^3+2n^2+3n\geqslant n^3+n^2+2n+2\,,$$

$$n^2+n\geqslant 2\,,$$

co jest spełnione dla każdego $n\geqslant 1$.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

473. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_0^9\frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $t=\sqrt{1+\sqrt{x}}$, czyli $x=\left(t^2-1\right)^2$ i formalnie $dx=4\left(t^3-t\right)\,dt$, otrzymujemy

$$\int\limits_0^9\frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}=\int\limits_1^2\frac{4\left(t^3-t\right)\,dt}{t}=4\cdot\int\limits_1^2 t^2-1\,dt=\frac{4t^3}{3}-4t\Bigg|_{t=1}^{2}=\frac{32}{3}-8-\frac{4}{3}+4=\frac{28}{3}-4=\frac{16}{3}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość 16/3.

474. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_1^9\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}\,dx$. **Pamiętaj o uproszczeniu wyniku.**

Rozwiązanie:
Podstawiamy $x=t^4$, czyli formalnie $dx=4t^3\,dt$:

$$\int\limits_1^9\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}\,dx=\int\limits_1^{\sqrt{3}}4t^3\cdot\operatorname{arctg}t\,dt\,.$$

Następnie wykonujemy całkowanie przez części:

$$\int\limits_1^{\sqrt{3}}4t^3\cdot\operatorname{arctg}t\,dt=t^4\cdot\operatorname{arctg}t\Bigg|_{t=1}^{\sqrt{3}}-\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{t^4}{t^2+1}\,dt=$$

$$=9\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}1-\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{t^4-1+1}{t^2+1}\,dt=9\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\int\limits_1^{\sqrt{3}}t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\,dt=$$

$$=3\pi-\frac{\pi}{4}-\left(\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t\Bigg|_{t=1}^{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=3\pi-\frac{\pi}{4}-\left(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\frac{1}{3}+1-\operatorname{arctg}1\right)=$$

$$=3\pi-\frac{\pi}{4}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}=3\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}=\frac{8\pi}{3}-\frac{2}{3}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{8\pi}{3}-\frac{2}{3}$.

475. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^4+x^2}$. **Pamiętaj o uproszczeniu wyniku.**

Rozwiązanie:
Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^4+x^2}=\frac{1}{(x^2+1)\cdot x^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x^2}, \qquad (*)$$

$$1=(Ax+B)\cdot x^2+C\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)+D\cdot\left(x^2+1\right),$$

$$1=Ax^3+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^2+D,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+C \\ 0 &= B+D \\ 0 &= C \\ 1 &= D \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $A=0$ oraz $B=-1$.

Wobec tego

$$\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^4+x^2}=\int\limits_1^{\sqrt{3}}-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2}\,dx=-\operatorname{arctg}x-\frac{1}{x}\Bigg|_{x=1}^{\sqrt{3}}=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}1+1=$$

$$=-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+1=1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12}$.

476. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\cdot\binom{3n}{n}\cdot x^n}{n!}$.

Rozwiązanie:
Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego szeregu traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x\neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{(n+1)^{n+1}\cdot\binom{3n+3}{n+1}\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n\cdot\binom{3n}{n}\cdot x^n}\right|=\left|\frac{(n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot x}{(n+1)}\cdot\frac{\binom{3n+3}{n+1}}{\binom{3n}{n}}\right|=$$

$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot|x|\cdot\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}{(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}\to\frac{27e\cdot|x|}{4}$$

przy $n\to\infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu równej $\frac{27e\cdot|x|}{4}$.

Jeżeli $\frac{27e\cdot|x|}{4}<1$, czyli $|x|<\frac{4}{27e}$, to szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{27e\cdot|x|}{4}>1$, czyli $|x|>\frac{4}{27e}$, to szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy $\frac{4}{27e}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{4}{27e}$.

477. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int\frac{dx}{x^2+2x+50}$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną całkę i wykonujemy kolejno podstawienia $y=x+1$ oraz $t=y/7$:

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+50}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+49}=\int\frac{dy}{y^2+49}=\int\frac{dy}{49(y/7)^2+49}=\int\frac{7\,dt}{49t^2+49}=$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{\mathrm{arctg}t}{7}+C=\frac{\mathrm{arctg}(y/7)}{7}+C=\frac{\mathrm{arctg}((x+1)/7)}{7}+C\,.$$

478. Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{2x+1}{x^4+x^2}\,dx$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{2x+1}{x^4+x^2}=\frac{1}{(x^2+1)\cdot x^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x^2}\,,$$

$$2x+1=(Ax+B)\cdot x^2+C\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)+D\cdot\left(x^2+1\right)\,,$$

$$2x+1=Ax^3+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^2+D\,,$$

$$\begin{cases}0 &= A+C\\ 0 &= B+D\\ 2 &= C\\ 1 &= D\end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $A=-2$ i $B=-1$.

Wobec tego

$$\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{2x+1}{x^4+x^2}\,dx=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty}-\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\,dx=-\ln\left(x^2+1\right)-\mathrm{arctg}x+2\ln|x|-\frac{1}{x}\Bigg|_{x=\sqrt{3}}^{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(-\mathrm{arctg}x)+\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)+\ln4+\mathrm{arctg}\sqrt{3}-2\ln\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}+0+\ln1+\frac{\pi}{3}+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}+\ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka jest zbieżna i ma wartość $\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}+\ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

479. Obliczyć całkę oznaczoną $\int\limits_0^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $x=t^6$ i formalnie $dx=6t^5\,dt$, otrzymujemy:

$$\int\limits_0^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\limits_0^{2}\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}=6\cdot\int\limits_0^{2}\frac{t^3\,dt}{t+1}=6\cdot\int\limits_0^{2}\frac{t^3+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\,dt=6\cdot\int\limits_0^{2}t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\,dt=$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|\Bigg|_{t=0}^{2}=16-12+12-6\ln3+6\ln1=16-6\ln3.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $16-6\ln3$.

480. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $x=t^3$ i formalnie $dx=3t^2\,dt$, a następnie całkując przez części, otrzymujemy:

$$\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\int\frac{\sin t}{t}\cdot3t^2\,dt=3\cdot\int t\cdot\sin t\,dt=3\cdot t\cdot(-\cos t)-3\cdot\int1\cdot(-\cos t)\,dt=$$

$$=-3\cdot t\cdot\cos t+3\cdot\int\cos t\,dt=-3\cdot t\cdot\cos t+3\cdot\sin t+C=-3\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\cos\sqrt[3]{x}+3\cdot\sin\sqrt[3]{x}+C.$$

481. Obliczyć wartość całki $\int\limits_0^{\pi}\sin^5x\,dx$.

Rozwiązanie:
Sposób I

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy

$$z=\cos x+i\sin x,$$

co daje

$$z^n=\cos nx+i\sin nx,\qquad z^{-n}=\cos nx-i\sin nx,\qquad \sin nx=\frac{z^n-z^{-n}}{2i}.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\sin^5x=\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^5=\frac{z^5-5z^3+10z-10z^{-1}+5z^{-3}-z^{-5}}{32i}=$$

$$=\frac{\sin 5x}{16}-\frac{5\sin 3x}{16}+\frac{5\sin x}{8}\,.$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę:

$$\int_0^\pi \sin^5 x\,dx=\int_0^\pi \frac{\sin 5x}{16}-\frac{5\sin 3x}{16}+\frac{5\sin x}{8}\,dx=-\frac{\cos 5x}{80}+\frac{5\cos 3x}{48}-\frac{5\cos x}{8}\bigg|_{x=0}^{\pi}=$$

$$=-\frac{\cos 5\pi}{80}+\frac{5\cos 3\pi}{48}-\frac{5\cos \pi}{8}+\frac{\cos 0}{80}-\frac{5\cos 0}{48}+\frac{5\cos 0}{8}=\frac{1}{80}-\frac{5}{48}+\frac{5}{8}+\frac{1}{80}-\frac{5}{48}+\frac{5}{8}=$$

$$=\frac{1}{40}-\frac{5}{24}+\frac{5}{4}=\frac{3-25+150}{120}=\frac{128}{120}=\frac{16}{15}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość 16/15.

Sposób II

Podstawienie $t=\cos x$ i formalnie $dt=-\sin x\,dx$ prowadzi do

$$\int_0^\pi \sin^5 x\,dx=-\int_1^{-1}\left(1-t^2\right)^2\,dt=\int_{-1}^{1} t^4-2t^2+1\,dt=2\cdot\int_0^1 t^4-2t^2+1\,dt=$$

$$=2\cdot\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t\right)\bigg|_{t=0}^{1}=2\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)=2\cdot\frac{3-10+15}{15}=2\cdot\frac{8}{15}=\frac{16}{15}\,.$$

482. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8^n+n^{2018}}}{\sqrt{4^n+n^{4444}}}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego dla ciągów otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2018}}{8^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{4444}}{4^n}=0\,.$$

Rachunki są tu pominięte, ale w rozwiązaniu muszą się znaleźć wraz z powołaniem się na odpowiednie kryterium.

Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8^n+n^{2018}}}{\sqrt{4^n+n^{4444}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot\sqrt[3]{1+\frac{n^{2018}}{8^n}}}{2^n\cdot\sqrt{1+\frac{n^{4444}}{4^n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{n^{2018}}{8^n}}}{\sqrt{1+\frac{n^{4444}}{4^n}}}=\frac{\sqrt[3]{1+0}}{\sqrt{1+0}}=1\,.$$

483. Obliczyć wartość całki $\int_0^\pi \cos^{10} x\,dx$.

Rozwiązanie:

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy

$$z=\cos x+i\sin x\,,$$

co daje

$$z^n = \cos nx + i\sin nx, \qquad z^{-n} = \cos nx - i\sin nx, \qquad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}.$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\cos^{10} x = \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^{10} =$$

$$= \frac{z^{10}+10z^8+45z^6+120z^4+210z^2+252+210z^{-2}+120z^{-4}+45z^{-6}+10z^{-8}+z^{-10}}{1024} =$$

$$= \frac{\cos 10x}{512} + \frac{5\cos 8x}{256} + \frac{45\cos 6x}{512} + \frac{15\cos 4x}{64} + \frac{105\cos 2x}{256} + \frac{63}{256}.$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^{\pi} \cos^{10} x\, dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos 10x}{512} + \frac{5\cos 8x}{256} + \frac{45\cos 6x}{512} + \frac{15\cos 4x}{64} + \frac{105\cos 2x}{256} + \frac{63}{256}\, dx = \frac{63\pi}{256}.$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $63\pi/256$.

484. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} n^p \cdot \left(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+\sqrt[3]{n+3}+\sqrt[3]{n+4}+\ldots+\sqrt[3]{8n-2}+\sqrt[3]{8n-1}+\sqrt[3]{8n}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{7n} n^p \cdot \sqrt[3]{n+k} = n^{p+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} \sqrt[3]{n+k} = n^{p+4/3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} \sqrt[3]{1+\frac{k}{n}} = n^{p+4/3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} f\left(1+\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $7n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{7n} f\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_1^8 f(x)\, dx = \int_1^8 \sqrt[3]{x}\, dx = \frac{3}{4} \cdot x^{4/3} \Big|_{x=1}^{8} = \frac{3}{4}\cdot 16 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\cdot 15 = \frac{45}{4}.$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+4/3}$ będzie równy 0, czyli dla $p = -4/3$.

Odpowiedź: Dla $p = -4/3$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $45/4$.

863. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+4)}$.

Rozwiązanie:

Rozłóżmy na ułamki proste wyraz ogólny szeregu:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+4)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+4},$$

$$1=A\cdot(n+1)\cdot(n+4)+B\cdot n\cdot(n+4)+C\cdot n\cdot(n+1)\,,$$
$$\text{dla } n=0: \quad 1=4A, \quad A=1/4\,,$$
$$\text{dla } n=-1: \quad 1=-3B, \quad B=-1/4\,,$$
$$\text{dla } n=-4: \quad 1=12C, \quad C=1/12\,.$$

Zatem

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+4)}=\frac{1/4}{n}-\frac{1/3}{n+1}+\frac{1/12}{n+4}\,.$$

W konsekwencji sumy częściowe danego szeregu wyrażają się wzorem

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+4)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1/4}{n}-\frac{1/4}{n+1}+\frac{1/12}{n+4}\right)=$$
$$=\left(\frac{1/4}{1}-\frac{1/3}{2}+\frac{1/12}{5}\right)+\left(\frac{1/4}{2}-\frac{1/3}{3}+\frac{1/12}{6}\right)+\left(\frac{1/4}{3}-\frac{1/3}{4}+\frac{1/12}{7}\right)+$$
$$+\left(\frac{1/4}{4}-\frac{1/3}{5}+\frac{1/12}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1/4}{N-3}-\frac{1/3}{N-2}+\frac{1/12}{N+1}\right)+$$
$$+\left(\frac{1/4}{N-2}-\frac{1/3}{N-1}+\frac{1/12}{N+2}\right)+\left(\frac{1/4}{N-1}-\frac{1/3}{N}+\frac{1/12}{N+3}\right)+\left(\frac{1/4}{N}-\frac{1/3}{N+1}+\frac{1/12}{N+4}\right)=$$
$$=\frac{1/4}{1}-\frac{1/12}{2}-\frac{1/12}{3}-\frac{1/12}{4}-\frac{1/4}{N+1}+\frac{1/12}{N+2}+\frac{1/12}{N+3}+\frac{1/12}{N+4}=$$
$$=\frac{23}{144}-\frac{1/4}{N+1}+\frac{1/12}{N+2}+\frac{1/12}{N+3}+\frac{1/12}{N+4}\to\frac{23}{144}$$

przy $N\to\infty$.

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa 23/144.

864. Rozstrzygnąć zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^{\infty}\sin x^2\,dx$.

Rozwiązanie:
Ponieważ zbieżność całki niewłaściwej nie zależy od zmiany granicy całkowania, w której nie ma osobliwości, możemy dla uproszczenia rozważać całkę

$$\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\infty}\sin x^2\,dx\,.$$

Wykonując podstawienie $x=\sqrt{t}$ i formalnie $dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ otrzymujemy

$$\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\infty}\sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt\,.$$

Całkowanie przez części prowadzi do

$$\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt=\int\limits_{\pi}^{\infty}\sin t\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{-\cos t}{\sqrt{t}}\bigg|_{t=\pi}^{\infty}-\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{-\cos t}{-2t^{3/2}}\,dt=\lim_{t\to\infty}\frac{-\cos t}{\sqrt{t}}+\frac{\cos\pi}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dt=$$

$$=0-\frac{1}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dt\,.$$

Problem zbieżności danej w zadaniu całki sprowadza się więc do zbieżności całki

$$\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dt\,,$$

która jest zbieżna na mocy kryterium zbieżności bezwzględnej i kryterium porownawczego:

$$\int\limits_{\pi}^{\infty}\left|\frac{\cos t}{t^{3/2}}\right|dt\leqslant\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{1}{t^{3/2}}\,dt<+\infty\,,\qquad \text{bo } 3/2>1\,.$$

Odpowiedź: Podana całka jest zbieżna.

865. Obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+3)}$.

Rozwiązanie:

Rozłóżmy na ułamki proste wyraz ogólny szeregu:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+3)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+3}\,,$$

$$1=A\cdot(n+1)\cdot(n+3)+B\cdot n\cdot(n+3)+C\cdot n\cdot(n+1)\,,$$

$$\text{dla } n=0:\quad 1=3A,\quad A=1/3\,,$$

$$\text{dla } n=-1:\quad 1=-2B,\quad B=-1/2\,,$$

$$\text{dla } n=-3:\quad 1=6C,\quad C=1/6\,.$$

Zatem

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+3)}=\frac{1/3}{n}-\frac{1/2}{n+1}+\frac{1/6}{n+3}\,.$$

W konsekwencji sumy częściowe danego szeregu wyrażają się wzorem

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+3)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1/3}{n}-\frac{1/2}{n+1}+\frac{1/6}{n+3}\right)=$$

$$=\left(\frac{1/3}{1}-\frac{1/2}{2}+\frac{1/6}{4}\right)+\left(\frac{1/3}{2}-\frac{1/2}{3}+\frac{1/6}{5}\right)+\left(\frac{1/3}{3}-\frac{1/2}{4}+\frac{1/6}{6}\right)+$$

$$+\left(\frac{1/3}{4}-\frac{1/2}{5}+\frac{1/6}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1/3}{N-3}-\frac{1/2}{N-2}+\frac{1/6}{N}\right)+$$

$$+\left(\frac{1/3}{N-2}-\frac{1/2}{N-1}+\frac{1/6}{N+1}\right)+\left(\frac{1/3}{N-1}-\frac{1/2}{N}+\frac{1/6}{N+2}\right)+\left(\frac{1/3}{N}-\frac{1/2}{N+1}+\frac{1/6}{N+3}\right)=$$

$$=\frac{1/3}{1}-\frac{1/6}{2}-\frac{1/6}{3}-\frac{1/3}{N+1}+\frac{1/6}{N+2}+\frac{1/6}{N+3}=\frac{7}{36}-\frac{1/3}{N+1}+\frac{1/6}{N+2}+\frac{1/6}{N+3}\to\frac{7}{36}$$

przy $N\to\infty$.

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa $7/36$.

866. Dana jest taka funkcja ciągła $f:[1,\infty)\to(0,\infty)$, że całka niewłaściwa $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna. Udowodnić zbieżność całki

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt[4]{f(x)}}{x}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy

$$\frac{\sqrt[4]{f(x)}}{x}=\sqrt[4]{f(x)\cdot\frac{1}{x^{4/3}}\cdot\frac{1}{x^{4/3}}\cdot\frac{1}{x^{4/3}}}\leqslant\frac{f(x)+\frac{1}{x^{4/3}}+\frac{1}{x^{4/3}}+\frac{1}{x^{4/3}}}{4}=\frac{f(x)}{4}+\frac{3/4}{x^{4/3}}\,,$$

skąd na mocy kryterium porównawczego otrzymujemy zbieżność całki podanej w tezie zadania:

$$\int\limits_1^\infty\frac{\sqrt[4]{f(x)}}{x}\,dx\leqslant\int\limits_1^\infty\frac{f(x)}{4}+\frac{3/4}{x^{4/3}}\,dx=\frac{1}{4}\cdot\int\limits_1^\infty f(x)\,dx+\frac{3}{4}\cdot\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x^{4/3}}<+\infty\,.$$

867. Podać przykład takiego ciągu (a_n), że szeregi $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n^{11}$ są zbieżne, a szereg $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n^9$ jest rozbieżny. Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Rozwiązanie:
Przykładem o własnościach sformułowanych w treści zadania jest ciąg (a_n) zdefiniowany wzorem

$$a_{k(m-1)+r}=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt[9]{m}} & \text{dla} \quad r=1,\\ -\dfrac{1}{\sqrt[9]{m}} & \text{dla} \quad r=2,3.\end{cases}$$

Powyższy ciąg prowadzi do następujących szeregów:

$$\sum_{n=1}^\infty a_n=2-1-1+\frac{2}{\sqrt[9]{2}}-\frac{1}{\sqrt[9]{2}}-\frac{1}{\sqrt[9]{2}}+\frac{2}{\sqrt[9]{3}}-\frac{1}{\sqrt[9]{3}}-\frac{1}{\sqrt[9]{3}}+\frac{2}{\sqrt[9]{4}}-\frac{1}{\sqrt[9]{4}}-\frac{1}{\sqrt[9]{4}}\ldots=$$

$$=(2-1-1)+\left(\frac{2}{\sqrt[9]{2}}-\frac{1}{\sqrt[9]{2}}-\frac{1}{\sqrt[9]{2}}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt[9]{3}}-\frac{1}{\sqrt[9]{3}}-\frac{1}{\sqrt[9]{3}}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt[9]{4}}-\frac{1}{\sqrt[9]{4}}-\frac{1}{\sqrt[9]{4}}\right)\ldots=$$

$$=0+0+0+0+\ldots=\sum_{n=1}^\infty 0=0\,.$$

Odnotujmy, że wobec $a_n\to0$ możemy najpierw sumować po trzy kolejne wyrazy szeregu, a potem dodawać otrzymane sumy.

$$\sum_{n=1}^\infty a_n^9=2^9-1-1+\frac{2^9}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2^9}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2^9}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\ldots=$$

$$=(512-1-1)+\left(\frac{512}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{512}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{512}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\ldots=$$

$$=510+\frac{510}{2}+\frac{510}{3}+\frac{510}{4}+\ldots=510\cdot\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}=+\infty\,. \qquad \text{(szereg harmoniczny)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{11} =$$

$$= 2^{11} - 1 - 1 + \frac{2^{11}}{2^{11/9}} - \frac{1}{2^{11/9}} - \frac{1}{2^{11/9}} + \frac{2^{11}}{3^{11/9}} - \frac{1}{3^{11/9}} - \frac{1}{3^{11/9}} + \frac{2^{11}}{4^{11/9}} - \frac{1}{4^{11/9}} - \frac{1}{4^{11/9}} \ldots =$$

$$= (2048-1-1) + \left(\frac{2048}{2^{11/9}} - \frac{1}{2^{11/9}} - \frac{1}{2^{11/9}}\right) + \left(\frac{2048}{3^{11/9}} - \frac{1}{3^{11/9}} - \frac{1}{3^{11/9}}\right) +$$

$$+ \left(\frac{2048}{4^{11/9}} - \frac{1}{4^{11/9}} - \frac{1}{4^{11/9}}\right) \ldots = 2046 + \frac{2046}{2^{11/9}} + \frac{2046}{3^{11/9}} + \frac{2046}{4^{11/9}} + \ldots = 2046 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/9}} < +\infty \,.$$

(bo $11/9 > 1$)

868. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_3^5 \sqrt[3]{x^2+11}\, dx$$

jest mniejsza czy większa od 6.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+11}\,.$$

Wówczas

$$f'(x) = \frac{2x}{3} \cdot \left(x^2+11\right)^{-2/3}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(x^2+11\right)^{-2/3} - \frac{8x^2}{9} \cdot \left(x^2+11\right)^{-5/3} =$$

$$= \frac{2x^2+22}{3} \cdot \left(x^2+11\right)^{-5/3} - \frac{8x^2}{9} \cdot \left(x^2+11\right)^{-5/3} = \frac{6x^2+66-8x^2}{9} \cdot \left(x^2+11\right)^{-5/3} =$$

$$= \frac{-2x^2+66}{9} \cdot \left(x^2+11\right)^{-5/3} = \left(33-x^2\right) \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(x^2+11\right)^{-5/3} \quad > \quad 0\,, \qquad \text{o ile} \qquad x^2 < 33\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $\left[-\sqrt{33}, \sqrt{33}\right]$ zawierającym interesujący nas przedział całkowania $[3, 5]$.

Ponieważ $f(4) = 3$, wykres funkcji f w przedziale całkowania leży powyżej[1] stycznej do wykresu w punkcie $(4, 3)$. Wobec tego

$$f(x) > 3 + f'(4) \cdot (x-4) \qquad \text{dla} \qquad x \in (3, 5)$$

i w konsekwencji

$$\int_3^5 \sqrt[3]{x^2+11}\, dx > \int_3^5 3 + f'(4) \cdot (x-4)\, dx = 6\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu. Można też wykonać bezpośrednie całkowanie.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest większa od 6.

Uwaga: Faktycznie podana całka ma wartość w przybliżeniu równą 6,005.

[1]Takie sformułowanie jest zgrabne, chociaż dla jego pełnej poprawności wymagałoby dodania nic nie wnoszącego do rozwiązania zastrzeżenia, że punkt styczności leży na stycznej, a nie powyżej niej.