KOLOKWIUM nr 10, 23.05.2019, godz. 12:15–13:00

Zadanie **17. (4+6=10 punktów)**

a) Obliczyć sumę zespolonego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$.
Jaki jest obszar zbieżności tego szeregu?

b) Wykorzystać otrzymany wynik do obliczenia sumy szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}$.
Doprowadzić wynik do postaci $\frac{a+b\cos x}{c+d\cos x}$, gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie:

a) Dany szereg jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_1=1$ i ilorazie $q=z/2$, skąd wynika, że jego suma jest równa

$$\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{2}{2-z}\,,$$

o ile $|z/2|<1$, czyli $|z|<2$, bo szereg geometryczny o ilorazie q jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q|<1$.

Zatem obszar zbieżności szeregu jest kołem o środku 0 i promieniu 2, bez okręgu stanowiącego brzeg tego koła.

b) Przyjmując $z=\cos x+i\sin x$, co daje

$$z^n=\cos nx+i\sin nx\,,$$

otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{Re} z^n}{2^n}=\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=\operatorname{Re}\frac{2}{2-z}=$$

$$=\operatorname{Re}\frac{2}{2-\cos x-i\sin x}=\operatorname{Re}\frac{2\cdot(2-\cos x+i\sin x)}{(2-\cos x)^2+\sin^2 x}=\frac{2\cdot(2-\cos x)}{4-4\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{4-2\cos x}{5-4\cos x}\,.$$

Zadanie **18. (10 punktów)**
Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+100}\,.$$

Rozwiązanie:
Spróbujemy udowodnić zbieżność danego szeregu korzystając z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Aby to udowodnić, musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne – oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
Sprawdzamy to następująco:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+100}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{100}{n}}=\frac{0}{1+0}=0\,.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.
Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$\frac{\sqrt{n}}{n+100}\geqslant\frac{\sqrt{n+1}}{n+101}\,, \qquad (*)$$
co kolejno jest równoważne nierównościom
$$\sqrt{n}\cdot(n+101)\geqslant\sqrt{n+1}\cdot(n+100)\,,$$
$$n\cdot(n+101)^2\geqslant(n+1)\cdot(n+100)^2\,,$$
$$n\cdot\left(n^2+202n+10201\right)\geqslant(n+1)\cdot\left(n^2+200n+10000\right)\,,$$
$$n^3+202n^2+10201n\geqslant n^3+201n^2+10200n+10000\,,$$
$$n^2+n\geqslant 10000\,,$$
$$n\cdot(n+1)\geqslant 100\cdot 100\,,$$
skąd wynika, że nierówność $(*)$ jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 100$.

Zatem szereg $\sum_{n=100}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+100}$ spełnia warunki kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, wobec czego jest zbieżny.

Ponieważ zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu wyrazów, także szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+100}$ jest zbieżny.