Kolokwium nr 61: czwartek 18.01.2018, godz. 14:15, materiał zad. 1–500.63, 501-721.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 15.01.2018 (grupa 1 *lux*).

711. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich funkcji różniczkowalnych $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniających warunki

$$f(3)=7 \qquad \text{oraz} \qquad 2\leqslant f'(x)\leqslant 3 \quad \text{dla każdego} \quad x\in\mathbb{R}\,.$$

W każdym z zadań **A-F** podaj odpowiedni kres zbioru.

A. $\sup\{f(6): f\in\mathbb{T}\}=$..................................

B. $\inf\{f(5): f\in\mathbb{T}\}=$..................................

C. $\sup\{f(2): f\in\mathbb{T}\}=$..................................

D. $\inf\{f(1): f\in\mathbb{T}\}=$..................................

E. $\sup\{f(9)-f(4): f\in\mathbb{T}\}=$..................................

F. $\inf\{f(7)-f(0): f\in\mathbb{T}\}=$..................................

712. Przyporządkować następującym twierdzeniom podane niżej warunki oraz powiedzieć, co mówi warunek nieprzyporządkowany żadnemu twierdzeniu.

(i) **Własność Darboux funkcji ciągłych:** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, to

(ii) **Własność Darboux pochodnej funkcji:** Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale otwartym zawierającym przedział $[a,b]$, to

(iii) **Twierdzenie Rolle'a:** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b), a ponadto $f(a)=f(b)$, to

(iv) **Twierdzenie Lagrange'a (o wartości średniej rachunku różniczkowego):** Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b), to

(4♣) $$\underset{s\in(0,1)}{\forall}\ \underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f'(a+t(b-a))=f'(a)+s(f'(b)-f'(a))$$

(5♢) $$\underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+t(b-a))$$

(6♡) $$\underset{s\in(0,1)}{\forall}\ \underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f(a+t(b-a))=f(a)+s(f(b)-f(a))$$

(7♢) $$\underset{t\in(0,1)}{\forall}\ \underset{s\in(0,1)}{\exists}\ f(a+t(b-a))=f(a)+s(f(b)-f(a))$$

(7♠) $$\underset{t\in(0,1)}{\exists}\ f'(a+t(b-a))=0$$

713. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}\,.$$

714. Udowodnić nierówność

$$\operatorname{arctg}6+\operatorname{arctg}12<\operatorname{arctg}7+\operatorname{arctg}10\,.$$

715. Wyznaczyć największą liczbę całkowitą dodatnią n, dla której istnieje taka liczba rzeczywista A, że funkcja

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}-1+\ln(x+1)}{x^n} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze i obliczyć $f'(0)$ dla tych wartości n i A.

716. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=-5x+\ln\left(e^{2x}+e^{8x}\right).$$

Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$|f'(x)|<3\,.$$

717. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Wiadomo, że

$$f(0)=0, \qquad f(3)=9, \qquad f(5)=11.$$

Dowieść, że istnieje taka liczba rzeczywista x, że $f'(x)=2$.

718. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną rzędu pierwszego na całej prostej. Wiadomo, że $f(0)=0$, $f(7)=12$, a ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$1<f'(x)<2\,.$$

Dowieść, że wówczas zachodzi nierówność

$$|f(4)-.........|<1\,.$$

W miejsce kropek należy wpisać **konkretną** liczbę rzeczywistą (niezależną od f !!!).

719. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}\,.$$

720. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3}}{e^{n^2+pn}}$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

721. Funkcja ciągła $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x)=x^x$ dla $x>0$. Obliczyć pochodną prawostronną $f'(0^+)$ albo wykazać, że nie istnieje.