Kolokwium nr 3: poniedziałek 6.11.2017, godz. 12:15-13:00, materiał zad. 1–149.

Poziom standardowy (z myślą o ocenie co najwyżej dobrej)

3. Szacowanie liczb i wyrażeń.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.
Pomoc w rozwiązaniu tych zadań można uzyskać na Analizie Matematycznej 1P.

81. Niech $a=\sqrt[4]{2}$. Która z liczb jest większa:

$$a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}} \qquad \text{czy} \qquad 10^{10^{10}}\ ?$$

Pomoc dla osób dostających oczopląsu: liczba a występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

Która z liczb jest większa ?

82. $123456\cdot 123458$ czy 123457^2 **83.** $1000!$ czy $(500!)^2$ **84.** $\binom{2007}{666}^{2007}$ czy $\binom{2007}{666}^{666}$

85. $\left(\sqrt[4]{83}-2\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{83}-2\right)^{666}$ **86.** $\left(\sqrt[4]{79}-2\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-2\right)^{666}$

87. $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{666}$ **88.** $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{2007}$ czy $\left(\sqrt[4]{79}-3\right)^{667}$

89. 2^{1000} czy 3^{700} **90.** 5^{444} czy 3^{700} **91.** $\frac{17}{20}$ czy $\frac{16}{21}$ **92.** $\frac{100}{7}$ czy $\frac{150}{11}$

93. $\frac{8^{444}}{17^{17}}$ czy $\frac{16^{333}}{19^{17}}$ **94.** $\frac{17^{667}}{3333^4+6666^4}$ czy $\frac{17^{666}}{3333^4}$ **95.** $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2007}{667}$

96. $\binom{2007}{666}$ czy $\binom{2008}{666}$ **97.** $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2007}{1667}$ **98.** $\binom{2007}{1666}$ czy $\binom{2008}{1666}$

99. $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\sqrt{37}+6$ **100.** $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy 12 **101.** $\frac{1}{\sqrt{37}-6}$ czy $\frac{1}{\sqrt{97}-10}$

102. $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8}$ czy $\left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$ **103.** $\log_9 27$ czy $\log_4 8$ **104.** $\log_3 8$ czy $\log_2 5$

105. $\log_5 127$ czy $\log_{10} 999$ **106.** $(\log_2 3)\cdot\log_5 7$ czy $(\log_2 7)\cdot\log_5 3$

107. $(\log_2 3)\cdot\log_7 5$ czy $(\log_7 9)\cdot\log_{16} 25$ **108.** $\log_2 3$ czy $\log_3 5$

109. $\log_3 7$ czy $\log_5 19$ **110.** $\log_2 3$ czy $\log_5 13$ **111.** $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$

Wskazówka do niektórych pytań:
Wiadomo, że wartość ułamka nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę różna od zera.
Podobnie, wartość logarytmu nie zmieni się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną .....

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 23,25,30.10.2017 (grupy 2–5).
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

112. Uporządkować następujące liczby w kolejności rosnącej

$$a=\left(5-\sqrt{37}\right)^{2008}, \quad b=\left(6-\sqrt{37}\right)^{2009}, \quad c=\left(7-\sqrt{73}\right)^{2011}, \quad d=\left(9-\sqrt{73}\right)^{2013}.$$

Która z liczb jest większa:

113. $2^{1000!}$ czy $999^{999!}$? **114.** 26^{99} czy 10^{151} ? **115.** 26^{99} czy 123^{65} ?

116. $\sqrt{37}-6$ czy $\frac{1}{10}$? **117.** $\left(\sqrt{37}-6\right)^{666}$ czy $\frac{1}{100^{100}}$? **118.** $2^{2^{2^{1001}}}$ czy $1000^{2^{2^{1000}}}$?

Wskazując odpowiednią liczbę naturalną k udowodnić nierówności $10^k<L<10^{2k}$.

119. $L=3972^{257}$ **120.** $L=257^{3972}$ **121.** $L=700!$

122. Niech $a=\sqrt[16]{2}$. Która z liczb jest większa: a^{256} czy 256^a ?

W każdym z poniższych zadań wpisz w miejscu kropek dwie liczby występujące w ciągu 0, 1, 2, 5 ,10, 100, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, $10^{1000000}$ na **kolejnych** miejscach tak, aby powstały prawdziwe nierówności.

123. .... $<2^{500}<$ ....

124. .... $<3^{2000}<$ ....

125. .... $<2^{10000}<$ ....

126. .... $<30^{10000}<$ ....

127. .... $<2^{2^{10}}<$ ....

128. .... $<4444^{4444}<$ ....

129. .... $<7777^{7777}<$ ....

130. .... $<2011^{2011}<$ ....

131. .... $<222^{5555}<$ ....

132. .... $<5555^{222}<$ ....

133. .... $<333^{333}<$ ....

134. .... $<10000!<$ ....

135. .... $<666!<$ ....

136. Udowodnić nierówność $n^{2^{27}}\leqslant 2^n$ dla wybranej przez siebie liczby naturalnej n większej od 1.

137. Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D (niezależne od n) udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{4n^4-3n^3+2}{5n^4+4n^2-2}\leqslant D\,.$$

Wskazując odpowiednie liczby wymierne dodatnie C, D oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\cdot n^k<W(n)<D\cdot n^k\,.$$

138. $W(n)=\dfrac{n^3+2n^2+1}{\sqrt{n^6+2}+2}$ **139.** $W(n)=\dfrac{2n^3-n^2+1}{\sqrt[3]{n^2+1}+1}$ **140.** $W(n)=\dfrac{\sqrt[5]{n^2+1}}{\sqrt[7]{n^3+1}+1}$

Dla podanej liczby x wskazać taką liczbę całkowitą n, że $n<x<n+1$.

141. $x=\dfrac{1}{5\sqrt{2}-7}$ **142.** $x=\dfrac{1}{4\sqrt{3}-7}$ **143.** $x=\dfrac{1}{3\sqrt{3}-5}$

144. $x=\dfrac{1}{3\sqrt{3}-4\sqrt{2}}$ **145.** $x=\dfrac{1}{3\sqrt{5}-7}$ **146.** $x=\dfrac{1}{2\sqrt{13}-7}$

147. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}\leqslant D\,.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D\leqslant 8C$.

148. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\sqrt[3]{n^3+63n^2}-n\leqslant 7C\,.$$

149. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\sqrt[4]{n^4+80n^3}-n\leqslant 10C\,.$$

Zadania do omówienia na ćwiczeniach 6.11.2017 (grupy 2–5).

Dla podanego wyrażenia $W(n)$ dobrać odpowiednie stałe g oraz C i udowodnić, że nierówności $g-C/n<W(n)<g+C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

150. $\dfrac{n^5+n^4+1}{2n^5+n^3+5}$ **151.** $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ **152.** $\dfrac{\sqrt{4n^4+1}}{n^2+1}$ **153.** $\sqrt{n^2+4n}-n$

Dla podanego wyrażenia $W(n,k)$ dobrać odpowiednią wartość parametru k i odpowiednie stałe dodatnie g oraz C i udowodnić, że nierówności $g-C/n<W(n,k)<g+C/n$ są prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n.

154. $\dfrac{\sqrt{n^k+1}}{n^6+n^5}$ **155.** $\dfrac{\sqrt{n^6+n^5}}{n^k+1}$ **156.** $\sqrt{n^8+n^k}-n^4$