KOLOKWIUM nr 12, 22.01.2018, godz. 12:15–13:45

Zadanie **24.** **(10 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-2x^2-2x-1}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{2h}-2h^2-2h-1}{h^3}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-2h^2-2h-1-Ah^3}{h^4}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{2e^{2h}-4h-2-3Ah^2}{4h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{4e^{2h}-4-6Ah}{12h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{8e^{2h}-6A}{24h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{8-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=4/3$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{16e^{2h}}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=4/3$ i wówczas $f'(0)=2/3$.

Zadanie **25.** **(30 punktów)**

W każdym z zadań **25.1-25.10** zapisz w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości trzech pochodnych funkcji w podanym punkcie. Za każdą poprawnie podaną pochodną otrzymasz **1 punkt.**

25.1. $f_1(x)=\sqrt{x}$ $f_1'(25)=\mathbf{1/10}$, $f_1''(25)=\mathbf{-1/500}$, $f_1'''(25)=\mathbf{3/25000}$

25.2. $f_2(x)=x\cdot\sqrt{x}$ $f_2'(1/4)=\mathbf{3/4}$, $f_2''(1/4)=\mathbf{3/2}$, $f_2'''(1/4)=\mathbf{-3}$

25.3. $f_3(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$ $f_3'(4)=\mathbf{20}$, $f_3''(4)=\mathbf{15/2}$, $f_3'''(4)=\mathbf{15/16}$

25.4. $f_4(x)=\sqrt[3]{x}$ $f_4'(1)=\mathbf{1/3}$, $f_4''(1)=\mathbf{-2/9}$, $f_4'''(1)=\mathbf{10/27}$

25.5. $f_5(x)=x\cdot\sqrt[3]{x}$ $f_5'(1/27)=\mathbf{4/9}$, $f_5''(1/27)=\mathbf{4}$, $f_5'''(1/27)=\mathbf{-72}$

25.6. $f_6(x)=\ln x$ $f_6'(2)=\mathbf{1/2}$, $f_6''(2)=\mathbf{-1/4}$, $f_6'''(2)=\mathbf{1/4}$

25.7. $f_7(x)=x\cdot\ln x$ $f_7'(1)=\mathbf{1}$, $f_7''(1)=\mathbf{1}$, $f_7'''(1)=\mathbf{-1}$

25.8. $f_8(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_8'(1)=\mathbf{1/2}$, $f_8''(1)=\mathbf{-1/2}$, $f_8'''(1)=\mathbf{1/2}$

25.9. $f_9(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_9'(2)=\mathbf{1/5}$, $f_9''(2)=\mathbf{-4/25}$, $f_9'''(2)=\mathbf{22/125}$

25.10. $f_{10}(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_{10}'(3)=\mathbf{1/10}$, $f_{10}''(3)=\mathbf{-3/50}$, $f_{10}'''(3)=\mathbf{13/250}$