KOLOKWIUM nr 1, 7.03.2017, godz. 12:15–13:00

Zadanie **1. (10 punktów)**

Wiedząc, że

$$\frac{d}{dx}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \arcsin x\, dx\,.$$

Rozwiązanie:

Dopisujemy do funkcji podcałkowej czynnik 1, po czym wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik 1 i różniczkując $\arcsin x$. Otrzymujemy:

$$\int \arcsin x\, dx=\int 1\cdot\arcsin x\, dx=x\cdot\arcsin x-\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,.$$

W ostatniej całce wykonujemy podstawienie $t=1-x^2$, w którym stosujemy formalny wzór $dt=-2x\,dx$. Otrzymujemy:

$$\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx=-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{-2x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\sqrt{t}+C_1=-\sqrt{1-x^2}+C_1\,.$$

W konsekwencji

$$\int \arcsin x\, dx=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C\,.$$

Zadanie **2. (10 punktów)**
Skonstruować funkcję różniczkowalną $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$f(0)=0 \qquad \text{oraz} \qquad f'(x)=\sqrt{x^4+2x^3+x^2} \quad \text{dla} \quad x\in\mathbb{R}\,.$$

Rozwiązanie:
Przepisujemy wzór na pochodną funkcji f:

$$f'(x)=\sqrt{x^4+2x^3+x^2}=\sqrt{\left(x^2+x\right)^2}=\left|x^2+x\right|=\begin{cases} x^2+x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,-1]\cup[0,+\infty) \\ -x^2-x & \text{dla} \quad x\in(-1,0) \end{cases}$$

Dla $x\in(-\infty,-1]$ zachodzi $f'(x)=x^2+x$, mamy więc[1]

$$f(x)=\int x^2+x\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_1\,.$$

Dla $x\in[-1,0]$ zachodzi $f'(x)=-x^2-x$, mamy więc

$$f(x)=\int -x^2-x\,dx=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C_2\,.$$

Dla $x\in[0,+\infty)$ zachodzi $f'(x)=x^2+x$, mamy więc

$$f(x)=\int x^2+x\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_3\,.$$

Aby zagwarantować warunek $f(0)=0$, należy przyjąć $C_2=C_3=0$.
Aby zagwarantować zgodność określenia $f(-1)$, musi być

$$\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+C_1=-\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}+C_2\,,$$

czyli

$$\frac{1}{6}+C_1=-\frac{1}{6}\,,$$

skąd $C_1=-1/3$.

Ostatecznie otrzymujemy

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{3} & \text{dla} \quad x\in(-\infty,-1] \\ -\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2} & \text{dla} \quad x\in(-1,0) \\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2} & \text{dla} \quad x\in[0,+\infty) \end{cases}$$

[1]Dokładniej: Funkcja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $g(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_1$ ma na całej prostej pochodną określoną wzorem $g'(x)=x^2+x$, skąd wynika, że jeżeli $f(x)=g(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_1$ dla $x\in(-\infty,-1]$, to $f'(x)=g'(x)=x^2+x$ dla $x\in(-\infty,-1)$ oraz $f'(x^-)=g'(x)=x^2+x$ dla $x=-1$.

Co więcej, wzór $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_1$ dla $x\in(-\infty,-1]$ definiuje wszystkie funkcje różniczkowalne $f:(-\infty,-1]\to\mathbb{R}$ spełniające warunki $f'(x)=x^2+x$ dla $x\in(-\infty,-1)$ oraz $f'(x^-)=x^2+x$ dla $x=-1$.