W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Po zmieszaniu 2015 litrów roztworu pewnej substancji o stężeniu 10% z 2015 litrami roztworu tejże substancji o stężeniu p%, otrzymano roztwór o stężeniu q%. Dla podanego q podać p.

a) $q=20$, $p=$ ....

b) $q=30$, $p=$ ....

c) $q=40$, $p=$ ....

d) $q=50$, $p=$ ....

2. Dla podanych liczb p, q podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego takie liczby wymierne dodatnie a, b, że liczba a stanowi p% iloczynu ab, a liczba b stanowi q% iloczynu ab.

a) $p=25$, $q=80$, $a=$ .... , $b=$ ....

b) $p=20$, $q=80$, $a=$ .... , $b=$ ....

c) $p=25$, $q=75$, $a=$ .... , $b=$ ....

d) $p=40$, $q=60$, $a=$ .... , $b=$ ....

3. Dla podanej liczby d podać zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych k o następującej własności:
Istnieje postęp arytmetyczny 61-wyrazowy o wyrazach całkowitych dodatnich, który ma dokładnie k wyrazów podzielnych przez d.

a) $d=3$, $k\in\{$ .... $\}$

b) $d=2$, $k\in\{$ .... $\}$

c) $d=5$, $k\in\{$ .... $\}$

d) $d=4$, $k\in\{$ .... $\}$

4. Dla podanej liczby d podać zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych k o następującej własności:
Istnieje postęp geometryczny 2015-wyrazowy o wyrazach całkowitych dodatnich, który ma dokładnie k wyrazów podzielnych przez d.

a) $d=16$, $k\in\{$ .... $\}$

b) $d=2$, $k\in\{$ .... $\}$

c) $d=4$, $k\in\{$ .... $\}$

d) $d=8$, $k\in\{$ .... $\}$

5. Dla podanej liczby a podać największą liczbę rzeczywistą $x<100$ taką, że $\{\log_4 x\}=\{\log_2 a\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

a) $a=3$, $x=$ ....

b) $a=7$, $x=$ ....

c) $a=5$, $x=$ ....

d) $a=11$, $x=$ ....

6. Zapisać zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $\log_x(9/4)<-1/2$, ...

b) $\log_x(9/4)>-2$, ...

c) $\log_x(9/4)>2$, ...

d) $\log_x(9/4)<1/2$, ...

7. Funkcja f jest zdefiniowana wzorem $f(x) = \{\log_{27} x\}$, gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y. Zapisać zbiór wartości funkcji f na podanym przedziale w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używać różnicy zbiorów).

a) $\left(1/3, \sqrt{3}\right)$, ...

b) $(3, 81)$, ...

c) $\left(27\sqrt[3]{3}, 81\sqrt{3}\right)$, ...

d) $\left(9, 27\sqrt{3}\right)$, ...

8. Dla podanych liczb m, n podać najmniejszą dodatnią miarę kąta α (w stopniach) spełniającą równanie $\sin(m\alpha) = \sin(n\alpha)$.

a) $m = 5$, $n = 13$, $\alpha =$ ....

b) $m = 4$, $n = 5$, $\alpha =$ ....

c) $m = 3$, $n = 7$, $\alpha =$ ....

d) $m = 2$, $n = 3$, $\alpha =$ ....

9. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Dla podanej miary kąta $\sphericalangle ABC$ podać miarę kąta wypukłego $\sphericalangle AOC$.

a) $\sphericalangle ABC = 150°$, $\sphericalangle AOC =$ ....

b) $\sphericalangle ABC = 60°$, $\sphericalangle AOC =$ ....

c) $\sphericalangle ABC = 30°$, $\sphericalangle AOC =$ ....

d) $\sphericalangle ABC = 120°$, $\sphericalangle AOC =$ ....

10. Rozważamy 40-kąt foremny $A_1A_2A_3\ldots A_{40}$. Dla podanych liczb m, n podać zbiór wszystkich takich liczb całkowitych dodatnich $k\leqslant 40$, różnych od m,n, że trójkąt $A_mA_nA_k$ jest prostokątny.

a) $m=20$, $n=21$, $k\in\{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

b) $m=11$, $n=22$, $k\in\{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

c) $m=1$, $n=2$, $k\in\{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

d) $m=17$, $n=29$, $k\in\{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

11. Dla podanej liczby n podać takie liczby naturalne a, b, c **większe od 1**, że $n^n=a^{b^c}$. Potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn. $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.

a) $n=45$, $a=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $c=\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $n=20$, $a=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $c=\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $n=18$, $a=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $c=\ldots\ldots\ldots\ldots$

d) $n=75$, $a=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $c=\ldots\ldots\ldots\ldots$

12. Dla podanej liczby n podać takie liczby naturalne a, b, c **większe od 1**, że $n^n=a^{b^c}$, a przy tym liczba c jest możliwie **największa.**

a) $n=72$, $a=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $c=\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $n=36$, $a=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $c=\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $n=1600$, $a=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $c=\ldots\ldots\ldots\ldots$

d) $n=27$, $a=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $b=\ldots\ldots\ldots\ldots$, $c=\ldots\ldots\ldots\ldots$