Egzamin: 5.02.2015 (czwartek), godz. 9:00-13:00 (2 x 110 minut)

Egzamin poprawkowy: 16.02.2015 (poniedziałek), godz. 9:00-13:20 (2 x 120 minut)

Ćwiczenia 26.01.2015 (poniedziałek): zad. 735-758

Ćwiczenia 2.02.2015 (poniedziałek): zad. 759-801

Uzupełnienie: liczby zespolone, zespolone szeregi liczbowe i potęgowe.

735. Sprawdzić, że

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\,\mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

jeśli $b\neq 0$.

Rozwiązać równania i układy równań.

736. $\overline{z}=z^2$ **737.** $\overline{z}=z^{-1}$ **738.** $1+i=z^2$ **739.** $3+4i=z^2$

740. $-3+4i=z^2$ **741.** $z^2+z=i$ **742.** $z^2+iz=1$ **743.** $z=\overline{z}+1$

744. $z^2\overline{z}=8i$ **745.** $z^4+10z^2+61=0$

746. $\begin{cases} z_1^2=z_2 \\ z_2^2=z_1 \end{cases}$ **747.** $\begin{cases} z_1^2+z_2^2=1 \\ z_1+z_2=-1 \end{cases}$ **748.** $\begin{cases} z_1+iz_2=1 \\ z_2+iz_1=2 \end{cases}$ **749.** $\begin{cases} z_1+\overline{z_2}=1 \\ \overline{z_1}+z_2=i \end{cases}$

750. $z^5=1$ **Wskazówka:** $z^4+z^3+z^2+z+1=(z^2+az\pm 1)(z^2+bz\pm 1)$

Rozwiązać równania i nierówności. Zaznaczyć zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej.

751. $\mathrm{Re}z+\mathrm{Re}z^2\geqslant 0$ **752.** $3|z|\leqslant|z^2|+1$ **753.** $|z|=|\overline{z}+1|$

754. $|z+i|\leqslant|z-i|$ **755.** $\mathrm{Im}\dfrac{z}{z^2+1}=0$ **756.** $\mathrm{Re}\dfrac{z+1}{z}=0$

757. W trójkącie prostokątnym PQD kąt przy wierzchołku P jest prosty, a przy tym $PQ=1$ i $PD=4$. Ponadto punkt C jest środkiem odcinka PD, punkt A jest środkiem odcinka PC, punkt B jest środkiem odcinka AC. Punkt E leży na prostej PD, przy czym

$$\sphericalangle PQA+\sphericalangle PQB+\sphericalangle PQC=\sphericalangle PQD+\sphericalangle PQE.$$

Obliczyć PE.

758. Wyprowadzić wzór na $\sin 5\alpha$ i $\cos 5\alpha$ w zależności od $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach zespolonych

Warunek konieczny zbieżności

Jeżeli z_n nie dąży do 0, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny.

Zbieżność bezwzględna

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Kryterium d'Alemberta

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$.

Kryterium Cauchy'ego

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny, a co więcej $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$.

Uogólnienie kryterium o szeregach naprzemiennych

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżnym do zera nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, to dla dowolnej takiej liczby zespolonej z, że $|z| = 1$ oraz $z \neq 1$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny.

Powyższe jest prawdą także dla $|z| < 1$, ale wówczas na ogół stosujemy inne kryteria.

Inne kryteria

Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ są zbieżne, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są zbieżne i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} y_n \,.$$

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ jest rozbieżny, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm y_n)$ są rozbieżne.

Dla dowolnej liczby zespolonej $c \neq 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Jeśli oba szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} c z_n = c \sum_{n=1}^{\infty} z_n \,.$$

Zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu początkowych wyrazów.

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są jednocześnie szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re} z_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im} z_n$. Jeśli podane szeregi są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im} z_n\,.$$

Obszar zbieżności szeregu potęgowego jest kołem o środku w zerze i promieniu $R \in [0,+\infty]$, zwanym promieniem zbieżności szeregu. Przy $R=0$ koło zbieżności degeneruje się do punktu 0, przy $R=+\infty$ obszarem zbieżności jest cała płaszczyzna zespolona.

Na okręgu będącym brzegiem koła zbieżności szereg potęgowy może być zbieżny w części punktów, a w części rozbieżny.

Zbadać zbieżność szeregów:

759. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+in+1}$ **760.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+i}$ **761.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+i}$ **762.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{n^2+i}$

Wyznaczyć obszary zbieżności zespolonych szeregów potęgowych:

763. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ **764.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8z^n}{n^2}$ **765.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$ **766.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2}$ **767.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{6n}}{n}$

768. Niech $z=\frac{3}{5}+\frac{4i}{5}$. Dla podanych liczb m, n podać taką liczbę całkowitą k, aby zachodziła równość $z^m \cdot \overline{z}^n = z^k$. Uwaga na sprzężenie w drugim czynniku po lewej stronie.

a) $m=10$, $n=1$, $k=$ .... ;

b) $m=15$, $n=2$, $k=$ .... ;

c) $m=20$, $n=3$, $k=$ .... ;

d) $m=50$, $n=4$, $k=$ ....

769. Dla podanej liczby zespolonej z podać najmniejszą liczbę naturalną $n>1$ taką, że $z^n=z$.

a) $z=i$, $n=$ .... ;

b) $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $n=$ .... ;

c) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$, $n=$ .... ;

d) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$, $n=$ ....

770. Rozwiązać równanie

$$z\overline{z}=z+\overline{z}$$

w liczbach zespolonych. Opisać, jaką figurą geometryczną na płaszczyźnie zespolonej jest zbiór rozwiązań.

771. Czy nierówność $|z+1|<|z-4|$ jest prawdziwa dla liczby zespolonej

a) $z=\log_2 3+i\cdot\log_3 7$;

b) $z=\log_3 5+i\cdot\log_4 9$;

c) $z=\log_4 8+i\cdot\log_5 12$;

d) $z=\log_5 11+i\cdot\log_6 14$?

772. Czy równość $\overline{z}^2=z^{-2}$ (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

a) $z=\sqrt{\log_6 2}+i\cdot\sqrt{\log_6 3}$;

b) $z=\sqrt{\log_{12} 3}+i\cdot\sqrt{\log_{12} 4}$;

c) $z=\sqrt{\log_{18} 4}+i\cdot\sqrt{\log_{18} 5}$;

d) $z=\sqrt{\log_{30} 5}+i\cdot\sqrt{\log_{30} 6}$?

773. Czy równość $z^{13}=z$ jest prawdziwa dla liczby zespolonej

a) $z=-i$;

b) $z=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$;

c) $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$;

d) $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$?

774. Czy równość $\overline{z}^{13}=z^{-13}$ (uwaga na sprzężenie po lewej stronie) jest prawdziwa dla liczby zespolonej

a) $z=\frac{3+4i}{5}$;

b) $z=\frac{5+8i}{9}$;

c) $z=\frac{5+i\sqrt{23}}{8}$;

d) $z=\frac{6+i\sqrt{13}}{7}$?

775. Czy podana liczba zespolona spełnia równanie $z^6=-64$

a) $z=1+i\sqrt{3}$;

b) $z=-1+i\sqrt{3}$;

c) $z=\sqrt{3}+i$;

d) $z=-\sqrt{3}+i$?

776. Niech $R(m,n)$ będzie liczbą takich liczb zespolonych z, że

$$(z^m-1)\cdot(z^n-1)=0.$$

Czy wtedy

a) $R(2,3)=5$;

b) $R(3,4)=6$;

c) $R(4,6)=8$;

d) $R(3,6)=8$?

777. Czy dla podanych liczb zespolonych z_1, z_2, z_3 istnieje taka liczba zespolona z, że

$$|z-z_1|=|z-z_2|=|z-z_3|$$

a) $z_1=1+i,\quad z_2=2+2i,\quad z_3=13+4i$;

b) $z_1=1+i,\quad z_2=2+2i,\quad z_3=8+8i$;

c) $z_1=1+i,\quad z_2=2+2i,\quad z_3=5+9i$;

d) $z_1=1+i,\quad z_2=2+2i,\quad z_3=7+11i$?

778. Czy podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z-1|\leqslant|z-3|$

a) $z=\log_2 3+i\cdot\log_2 7$ ....
b) $z=\log_2 7+i\cdot\log_2 5$ ....

c) $z=\log_2 3+i\cdot\log_2 11$ ....
d) $z=\log_2 5+i\cdot\log_2 13$ ....

779. Czy podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z-i|\leqslant|z-5i|$

a) $z=\log_2 3+i\cdot\log_2 7$ ....
b) $z=\log_2 7+i\cdot\log_2 5$ ....

c) $z=\log_2 3+i\cdot\log_2 11$ ....
d) $z=\log_2 5+i\cdot\log_2 13$ ....

780. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $\overline{z}=z^{-1}$

a) $z=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ ....
b) $z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ ....

c) $z=2+3i$ ....
d) $z=3+4i$ ....

781. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $z^6=1$

a) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ....
b) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ....

c) $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ....
d) $z=i$ ....

782. Czy podana liczba zespolona z spełnia równanie $z^8=1$

a) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ .... **b)** $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ....

c) $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ .... **d)** $z=i$ ....

783. Czy nierówność $|z-1|<|z-5|$ jest prawdziwa dla

a) $z=1+i$ .... **b)** $z=2+2i$ .... **c)** $z=3+3i$ .... **d)** $z=4+4i$ ....

784. Czy nierówność $|z|<|z-4i|$ jest prawdziwa dla

a) $z=1+i$ .... **b)** $z=2+2i$ .... **c)** $z=3+3i$ .... **d)** $z=4+4i$ ....

785. Czy nierówność $|z-5-5i|<|z+1+i|$ jest prawdziwa dla

a) $z=1+i$ .... **b)** $z=2+2i$ .... **c)** $z=3+3i$ .... **d)** $z=4+4i$ ....

786. Czy nierówność $|z-7|<|z-7i|$ jest prawdziwa dla

a) $z=1+i$ .... **b)** $z=2+2i$ .... **c)** $z=3+3i$ .... **d)** $z=4+4i$ ....

787. Czy liczba $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ jest rzeczywista dla

a) $n=2012$ .... **b)** $n=2013$ .... **c)** $n=2014$ .... **d)** $n=2016$ ....

788. Czy liczba $\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)^n$ jest rzeczywista dla

a) $n=2012$ .... **b)** $n=2013$ .... **c)** $n=2014$ .... **d)** $n=2016$ ....

789. Czy liczba $(-1+i)^n$ jest rzeczywista dla

a) $n=2012$ .... **b)** $n=2013$ .... **c)** $n=2014$ .... **d)** $n=2016$ ....

Na każde z poniższych 12 pytań udziel odpowiedzi **TAK/NIE**.
Czy zespolony szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ jest zbieżny dla

790. $z=1$ .... **791.** $z=-1$ ....

792. $z=i$ .... **793.** $z=\frac{3+4i}{5}$ ....

794. $z=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ .... **795.** $z=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ ....

796. $z=\frac{5+5i}{7}$ .... **797.** $z=\frac{7-4i}{8}$ ....

798. $z=\frac{2+2i}{3}$ .... **799.** $z=\frac{4\sqrt{5}}{9}$ ....

800. $z=3i\cdot\log_{26}3$ .... **801.** $z=2i\cdot\log_{26}5$ ....