19	20	Σ

Nazwisko 0

Imię

Indeks

ANALIZA 1A, KOLOKWIUM nr 12, 20.01.2014, godz. 13.15-14.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **19.** **(5 punktów)**

Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{x\}+b\cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x, a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje **w wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a,b), dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

Rozwiązanie:

Funkcja f zależy od $\{x\}$, jest więc okresowa z okresem 1. Ponadto f jest ciągła we wszystkich punktach niecałkowitych. Pozostaje zbadać ciągłość funkcji f w punktach całkowitych, a wobec jej okresowości, wystarczy zbadać ciągłość w punkcie 1.

Ponieważ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=a+3b$$

oraz

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=b,$$

funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a+3b=b,$$

czyli

$$a=-2b.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $a=-2b$.

Zadanie **20.** **(7 punktów)**

Obliczyć wartość granicy ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{3^n+1}+\frac{3^{n-1}\cdot 2}{3^n+2}+\frac{3^{n-2}\cdot 4}{3^n+4}+\frac{3^{n-3}\cdot 8}{3^n+8}+\ldots+\frac{9\cdot 2^{n-2}}{3^n+2^{n-2}}+\frac{3\cdot 2^{n-1}}{3^n+2^{n-1}}+\frac{2^n}{3^n+2^n}\right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do 0 przy n dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp geometryczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n\leqslant\frac{3^n}{3^n}+\frac{3^{n-1}\cdot 2}{3^n}+\frac{3^{n-2}\cdot 4}{3^n}+\frac{3^{n-3}\cdot 8}{3^n}+\ldots+\frac{9\cdot 2^{n-2}}{3^n}+\frac{3\cdot 2^{n-1}}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}=$$
$$=\frac{3^n+3^{n-1}\cdot 2+3^{n-2}\cdot 4+3^{n-3}\cdot 8+\ldots+9\cdot 2^{n-2}+3\cdot 2^{n-1}+2^n}{3^n}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n\geqslant\frac{3^n}{3^n+2^n}+\frac{3^{n-1}\cdot 2}{3^n+2^n}+\frac{3^{n-2}\cdot 4}{3^n+2^n}+\frac{3^{n-3}\cdot 8}{3^n+2^n}+\ldots+\frac{9\cdot 2^{n-2}}{3^n+2^n}+\frac{3\cdot 2^{n-1}}{3^n+2^n}+\frac{2^n}{3^n+2^n}=$$
$$=\frac{3^n+3^{n-1}\cdot 2+3^{n-2}\cdot 4+3^{n-3}\cdot 8+\ldots+9\cdot 2^{n-2}+3\cdot 2^{n-1}+2^n}{3^n+2^n}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu geometrycznego otrzymujemy

$$3^n+3^{n-1}\cdot 2+3^{n-2}\cdot 4+3^{n-3}\cdot 8+\ldots+9\cdot 2^{n-2}+3\cdot 2^{n-1}+2^n=$$
$$=3^n\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=3^n\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}=3^{n+1}\cdot\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=3^{n+1}-2^{n+1}\,,$$

gdyż iloraz powyższego postępu jest równy $2/3$, a $n+1$ jest liczbą wyrazów postępu.

Wobec tego

$$c_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n}=3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 3-2\cdot 0=3$$

przy $n\to\infty$ i podobnie

$$a_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n+2^n}=\frac{3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}\to\frac{3-2\cdot 0}{1+0}=3\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 3$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3 \,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 3 \,.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 3.