| 5 | 6 | Σ |
|---|---|---|
| | | |

Nazwisko 0

Imię Indeks

**ANALIZA 1A, KOLOKWIUM nr 3, 23.10.2012, godz. 10.15-11.00**

Wykład: J. Wróblewski

**PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW**

*Zadanie* **5.** **(5 punktów)**

W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków $\geqslant$, $\leqslant$, a następnie dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n$ zachodzi nierówność

$$(n+2)\cdot\binom{2n}{n}\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2^{2n-1}\,.$$

*Rozwiązanie:*

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy $(n+2)\cdot\binom{2n}{n}=3\cdot 2=6$ oraz $3\cdot 2^{2n-1}=3\cdot 2=6$, a zatem obie strony nierówności mają tę samą wartość. Tak więc dana w zadaniu nierówność jest prawdziwa bez względu na wybór kierunku nierówności.

2° Niech teraz $n$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+2)\cdot\binom{2n}{n}\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2^{2n-1}\,,$$

gdzie w powyższej i wszystkich występujących dalej nierównościach w miejscu kropek należy konsekwentnie wstawić wybrany znak nierówności. Chcemy wykazać, że

$$(n+3)\cdot\binom{2n+2}{n+1}\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2^{2n+1}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$(n+3)\cdot\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(n+3)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}=\frac{(n+3)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)}=$$

$$=(n+2)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{(n+3)(2n+1)(2n+2)}{(n+2)(n+1)^2}=(n+2)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{2(n+3)(2n+1)}{(n+2)(n+1)}\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2^{2n-1}\cdot\frac{2(n+3)(2n+1)}{(n+2)(n+1)}\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2^{2n-1}\cdot 4=3\cdot 2^{2n+1}\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+3)(2n+1)}{(n+2)(n+1)}\ldots\ldots\ldots 4\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(n+3)(2n+1)\ldots\ldots\ldots 4(n+2)(n+1)\,,$$

$$(n+3)(2n+1)\ldots\ldots\ldots 2(n+2)(n+1)\,,$$

$$2n^2+7n+3\ldots\ldots\ldots 2n^2+6n+4\,,$$

$$n \ldots\ldots\ldots 1\,.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla wszystkich $n \geqslant 1$, o ile w miejsce kropek wstawimy znak $\geqslant$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność dana w zadaniu, uzupełniona znakiem $\geqslant$, została udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych $n$.

*Zadanie* **6. (6 punktów)**
Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej (podać tylko odpowiedź).

$$A = 10^{10^{11}}, \quad B = 10^{10^{20}}, \quad C = 10^{10^{50}}, \quad D = 10^{10^{250}}$$

$$E = (10!)^{10!}, \quad F = (100!)^{10^{10}}, \quad G = 2^{100!}$$

$$H = 2^{2^{100}}, \quad I = 10^{10^{10^{3}}}, \quad J = 2^{2^{2^{10}}}$$

W tabeli poniżej podaj **pozycję** każdej liczby w uporządkowaniu rosnącym - od najmniejszej (1) do największej (10). Dla ułatwienia pozycje dwóch liczb zostały podane.

| Liczba | Pozycja | Błąd |
|---|---|---|
| A | 2 | — |
| B | | |
| C | 6 | — |
| D | | |
| E | | |
| F | | |
| G | | |
| H | | |
| I | | |
| J | | |
| Suma błędów $S$ | | |
| Ocena $= 6 - \frac{S}{2}$ | | |

Błąd zostanie obliczony przez sprawdzającego jako różnica między podaną przez Ciebie pozycją i pozycją poprawną.

Gdy ocena wychodzi poniżej zera, otrzymasz **0 punktów.**

*Rozwiązanie:*
Poprawny porządek jest następujący

$$E < A < F < B < H < C < G < D < J < I$$

Szacowania dowodzące poprawności powyższego uporządkowania (nie były wymagane na kolokwium):

$$E = (10!)^{10!} < \left(10^{10}\right)^{10^{10}} = 10^{10^{11}} = A$$
$$A = 10^{10^{11}} = \left(10^{10}\right)^{10^{10}} < \left(10^{90}\right)^{10^{10}} < (100!)^{10^{10}} = F$$
$$F = (100!)^{10^{10}} < \left(10^{200}\right)^{10^{10}} < \left(10^{1000}\right)^{10^{10}} = 10^{10^{13}} < B$$
$$B < 10^{10^{29}} < 16^{10^{30}/4} = 2^{10^{30}} = 2^{1000^{10}} < 2^{1024^{10}} = 2^{2^{100}} = H$$
$$H = 2^{2^{100}} < 2^{2^{120}} = 2^{8^{40}} < 10^{10^{40}} < C$$
$$C < 10^{10^{90}} < 16^{100!/4} = 2^{100!} = G$$
$$G = 2^{100!} < 10^{10^{200}} < D$$
$$D < 10^{10^{299}} < 16^{10^{300}/4} = 2^{10^{300}} = 2^{1000^{100}} < 2^{1024^{100}} < 2^{2^{1000}} < 2^{2^{2^{10}}} = J$$
$$J = 2^{2^{2^{10}}} = 2^{2^{1024}} = 2^{4^{512}} < 10^{10^{512}} < 10^{10^{1000}} = I$$

Poprawne pozycje:

| Liczba | Pozycja |
|---|---|
| A | 2 |
| B | 4 |
| C | 6 |
| D | 8 |
| E | 1 |
| F | 3 |
| G | 7 |
| H | 5 |
| I | 10 |
| J | 9 |