21	22	Σ

Nazwisko | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0

Imię | | | | | | | | | | | | | | Indeks | | | | | | |

ANALIZA 1A, KOLOKWIUM nr 11, 8.01.2013, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **21.** **(9 punktów)**

W każdym z dziewięciu poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$).

Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt.**

Przypomnienie: Zapis $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

21.1. $\lim\limits_{x\to 16^-} \{\log_4 x\} =$ 1

21.2. $\lim\limits_{x\to 16^+} \{\log_4 x\} =$ 0

21.3. $\lim\limits_{x\to 16^-} \{\log_8 x\} =$ 1/3

21.4. $\lim\limits_{x\to 16^+} \{\log_8 x\} =$ 1/3

21.5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x =$ e^2

21.6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x =$ e^3

21.7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+4)^x} =$ e^{e^4}

21.8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+27)^x} =$ $e^{e^{27}}$

21.9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+256)^x} =$ $e^{e^{256}}$

Zadanie **22. (5 punktów)**

Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{18x^6+19x^4+20}{21x^6+20x^2+19} \leqslant 10\cdot C\,.$$

Rozwiązanie:

W przypadku, gdy $|x| \geqslant 1$, wykonujemy następujące szacowania:

$$\frac{3}{10}=\frac{18}{60}=\frac{18x^6+0+0}{21x^6+20x^6+19x^6} \leqslant \frac{18x^6+19x^4+20}{21x^6+20x^2+19} \leqslant \frac{18x^6+19x^6+20x^6}{21x^6+0+0}=\frac{57}{21}=\frac{19}{7}\,.$$

Natomiast w przypadku, gdy $|x|<1$, oszacowania wyglądają następująco:

$$\frac{1}{3}=\frac{0+0+20}{21+20+19} \leqslant \frac{18x^6+19x^4+20}{21x^6+20x^2+19} \leqslant \frac{18+19+20}{0+0+19}=3\,.$$

Zauważamy, że

$$\frac{3}{10}<\frac{1}{3}$$

oraz

$$\frac{19}{7}<3\,.$$

Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności

$$\frac{3}{10} \leqslant \frac{18x^6+19x^4+20}{21x^6+20x^2+19} \leqslant 3\,,$$

można więc przyjąć $C=3/10$.