EGZAMIN, ANALIZA 1A, 31.01.2013

8 zadań po 5 punktów, progi: 20=3.0, 24=3.5, 28=4.0, 32=4.5, 36=5.0

Zadanie **1.**

W każdym z zadań **1.1-1.5** podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** lub **NIE**).
Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt.
Jeśli podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz 0.5 punktu.
Powyższa punktacja zakłada, że wynik będzie podany w postaci uproszczonej - za każde podanie wyniku w postaci rażąco nieuproszczonej stracisz 0.2 punktu.

Zmienne m,n przebiegają zbiór liczb naturalnych $N=\{1,2,3,4,5,\dots\}$

1.1. $A=\left\{\frac{m}{n} : 25n^2 \leqslant m^2 \leqslant 27n^2\right\}$ Ocena ....

$\inf A=$.. $\sup A=$..

Czy kres dolny należy do zbioru A .... Czy kres górny należy do zbioru A ....

1.2. $B=\left\{\frac{m}{n} : 25n^3 \leqslant m^3 \leqslant 27n^3\right\}$ Ocena ....

$\inf B=$.. $\sup B=$..

Czy kres dolny należy do zbioru B .... Czy kres górny należy do zbioru B ....

1.3. $C=\left\{\frac{m}{n} : 3^n \leqslant 8^m \leqslant 4^n\right\}$ Ocena ....

$\inf C=$.. $\sup C=$..

Czy kres dolny należy do zbioru C .... Czy kres górny należy do zbioru C ....

1.4. $D=\left\{\frac{m}{n} : 3^n \leqslant 9^m \leqslant 4^n\right\}$ Ocena ....

$\inf D=$.. $\sup D=$..

Czy kres dolny należy do zbioru D .... Czy kres górny należy do zbioru D ....

1.5. $E=\left\{\frac{1}{10n-37} : n\in\mathbb{N}\right\}$ Ocena ....

$\inf E=$.. $\sup E=$..

Czy kres dolny należy do zbioru E .... Czy kres górny należy do zbioru E ....

Zadanie **2.**

Przy każdym z poniższych 14 zdań w miejscu kropek postaw jedną z liter **P, F, N**:

P - jest **P**rawdą (tzn. musi być prawdziwe)

F - jest **F**ałszem (tzn. musi być fałszywe)

N - może być prawdziwe lub fałszywe (tzn. **N**ie wiadomo, czasem bywa prawdziwe, a czasem fałszywe)

Za podanie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\mathbf{max}(0, n-9)$ **punktów.**

O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że

- $T(1)$ jest prawdziwe,
- dla każdej liczby naturalnej n zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+2)$,
- implikacja $T(102) \Rightarrow T(100)$ jest fałszywa.

Co można wywnioskować o prawdziwości zdania:

a) $T(77)$ ....

b) $T(777)$ ....

c) $T(66)$ ....

d) $T(666)$ ....

e) $T(44) \Rightarrow T(444)$ ....

f) $T(55) \Rightarrow T(555)$ ....

g) $T(22) \Rightarrow T(20)$ ....

h) $T(222) \Rightarrow T(200)$ ....

i) $T(99) \Rightarrow T(91)$ ....

j) $T(999) \Rightarrow T(991)$ ....

k) $T(87) \Rightarrow T(88)$ ....

l) $T(88) \Rightarrow T(89)$ ....

m) $T(887) \Rightarrow T(888)$ ....

n) $T(888) \Rightarrow T(889)$ ....

Zadanie **3.**

W każdym z siedmiu poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji (liczba rzeczywista) lub granicy niewłaściwej ($+\infty$ lub $-\infty$).

Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\mathbf{max}(0,n-2)$ **punktów.**

3.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x+2} =$ ....

3.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3x+2}} =$ ....

3.3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3x^2+2}} =$ ....

3.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3x^3+2}} =$ ....

3.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3x^2}\right)^{x} =$ ....

3.6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3x^2}\right)^{x^2} =$ ....

3.7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3x^2}\right)^{x^3} =$ ....

Zadanie **4.**
Za udzielenie n poprawnych odpowiedzi otrzymasz $\mathbf{max}(0, n-1)$ **punktów.**

Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x\}^2+c\cdot\{x\}\,,$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=$..........., $c=$...........

b) $a=$..........., $b=2$, $c=$...........

c) $a=$..........., $b=$..........., $c=3$

d) $a=2$, $b=$..........., $c=$...........

e) $a=$..........., $b=3$, $c=$...........

f) $a=$..........., $b=$..........., $c=5$

Zadanie **5.**

Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n^2}}{\sqrt{n}\cdot 5^{n^2}}\,.$$

Zadanie **6.**

Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{7}{2}\,.$$

Uzasadnić poprawność podanego przykładu.

Zadanie **7.**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^p+1}{\sqrt{900n^{900}+1}}+\frac{n^p+8}{\sqrt{900n^{900}+32}}+\ldots+\frac{n^p+k^3}{\sqrt{900n^{900}+k^5}}+\ldots+\frac{n^p+8n^{18}}{\sqrt{900n^{900}+32n^{30}}}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru p, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Zadanie **8.**

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[8]{x^4+1}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{2}\,.$$