17	18	Σ

Nazwisko ________________ 0

Imię ________________ Indeks ________

ANALIZA 1A, KOLOKWIUM nr 9, 6.12.2011, godz. 10.15-11.00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **17. (1+4+15=20 punktów)**

Wśród poniższych sześciu szeregów wskaż szereg zbieżny, a następnie udowodnij jego zbieżność. Jeśli potrafisz, podaj jego sumę (tylko wynik, bez uzasadnienia).

(**A**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{7n+10}$ (**B**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n^2+1)}{3n^2+n}$ (**C**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+n}$

(**D**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+1)}{2n^2+1}$ (**E**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n^2+1)}{77n-1}$ (**F**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{2011n+2012}$

Za poprawne wskazanie szeregu zbieżnego otrzymasz **1 punkt.**
Bez poprawnego wskazania szeregu zbieżnego otrzymasz **0 punktów za całe zadanie.**
Za dowód zbieżności możesz otrzymać maksymalnie kolejne **4 punkty.**
Za bezbłędne podanie sumy wskazanego szeregu zbieżnego otrzymasz **15 punktów.**

Odpowiedź: Zbieżny jest szereg .... Jego suma jest równa ....

Poniżej zamieść dowód zbieżności szeregu.

Rozwiązanie:

Szeregiem zbieżnym jest szereg **(C)**.

Aby to udowodnić, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych. W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{0-0}{1+0}=0\,.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{2n-1}{n(n+1)}\geqslant\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}\,,$$

czyli

$$\frac{2n-1}{n}\geqslant\frac{2n+1}{n+2}\,,$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$(2n-1)(n+2) \geqslant (2n+1)n$$
$$2n^2+3n-2 \geqslant 2n^2+n$$
$$2n \geqslant 2$$
$$n \geqslant 1\,,$$

a to jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych n.

Zatem na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych szereg **(C)** jest zbieżny.

W celu obliczenia sumy szeregu **(C)** rozkładamy jego wyrazy na ułamki proste:

$$\frac{2n-1}{n^2+n} = \frac{2n-1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$
$$2n-1 = A(n+1)+Bn$$
$$2n-1 = An+A+Bn$$
$$2 = A+B, \quad -1 = A$$
$$A = -1, \quad B = 3\,.$$

Wykorzystujemy otrzymany rozkład do rozłożenia szeregu na sumę dwóch szeregów przypominających szereg anharmoniczny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-(-1)^n}{n} + \frac{3\cdot(-1)^n}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 3\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\,.$$

W drugim szeregu zmieniamy numerację podstawiając $k=n+1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 3\cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 3\cdot \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) - 1 \right) = 4\ln 2 - 3\,.$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy ze znajomości sumy szeregu anharmonicznego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2\,.$$

Odpowiedź: Suma szeregu **(C)** jest równa $4\ln 2 - 3$.

Uwaga:

Wartość sumy szeregu anharmonicznego została podana na wykładzie.
Przedstawiony został też przykład wykorzystujący rozkład na ułamki proste.
Wydaje się jednak mało prawdopodobne, aby podczas kolokwium którykolwiek ze studentów był w stanie skutecznie wykorzystać te dwa fakty do poprawnego obliczenia sumy szeregu **(C)** - to zadanie jest naprawdę trudne.
Jeśli mimo to komuś się udało, oprócz 15 punktów należą mu się gratulacje.
Jeśli nikt tego nie dokonał, no cóż, pomimo daty kolokwium, nie należy wierzyć w Świętego Mikołaja rozdającego punkty.

Zadanie **18. (5 punktów)**
W każdym z 5 poniższych zadań udziel czterech **niezależnych** odpowiedzi:
Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)
R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)
N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)
Za każde zadanie, w którym podasz cztery poprawne odpowiedzi, otrzymasz 1 punkt.
Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

18.1 O ciągu (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich wiadomo, że ciąg $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ jest zbieżny do liczby rzeczywistej g. Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że

a) $g=0$ R **b)** $0<g<1$ R

c) $g=1$ N **d)** $1<g$ Z

18.2 Ciąg (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich jest zbieżny do liczby rzeczywistej g. Co można wywnioskować o zbieżności ciągu $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, jeżeli wiadomo, że

a) $g=0$ N **b)** $0<g<1$ Z

c) $g=1$ Z **d)** $1<g$ Z

18.3 O ciągu (a_n) liczb rzeczywistych wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i jego sumą jest liczba rzeczywista g. Co można wywnioskować o zbieżności ciągu (a_n), jeżeli wiadomo, że

a) $g=0$ Z **b)** $0<g<1$ Z

c) $g=1$ Z **d)** $1<g$ Z

18.4 Ciąg (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich jest zbieżny do liczby rzeczywistej g. Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że

a) $g=0$ N **b)** $0<g<1$ R

c) $g=1$ R **d)** $1<g$ R

18.5 O ciągu (a_n) liczb rzeczywistych dodatnich wiadomo, że ciąg $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ jest zbieżny do liczby rzeczywistej g. Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że

a) $g=0$ Z **b)** $0<g<1$ Z

c) $g=1$ N **d)** $1<g$ R