

Zadanie 10. (5 punktów)

Wskazać liczbę naturalną k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{14} + 9n^9 + 1} - n^7}{n^k}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy występujące pod znakiem granicy wyrażenie w postaci niezawierającej w liczniku różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości, a następnie dzielimy licznik i mianownik przez n^9 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{14} + 9n^9 + 1} - n^7}{n^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^9 + 1}{n^k \cdot (\sqrt{n^{14} + 9n^9 + 1} + n^7)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 + n^{-9}}{n^{k-2} \cdot (\sqrt{1 + 9n^{-5} + n^{-14}} + 1)}. \end{aligned}$$

Dla $k = 2$ otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 + n^{-9}}{\sqrt{1 + 9n^{-5} + n^{-14}} + 1} = \frac{9 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{9}{2}.$$

Odpowiedź: Przy $k = 2$ granica jest równa $9/2$.

Uwaga: Liczba $k = 2$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania. Jednak zgodnie z poleceniem wystarczyło wskazać k , bez konieczności uzasadnienia, że takie k jest tylko jedno.