

5. Zadania

5.5.1 Zauważyć, że rozkład Hahna $X = X^+ \cup X^-$ dla miary znakowanej κ jest "jednoznaczny z dokładnością do zbiorów miary zero" (co to znaczy?). Czy rozkład α na różnicę dwóch miar jest jedyny?

5.5.2 Zauważyć, że jeśli miara znakowana ν przyjmuje tylko wartości rzeczywiste, to jest ograniczona.

5.5.3 Niech f będzie taką funkcją mierzalną, że przynajmniej jedna z funkcji f^+, f^- jest μ -całkowalna i niech $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ dla zbiorów $A \in \Sigma$ (tutaj μ jest miarą na Σ). Zapisać ν^+, ν^- oraz $|\nu|$ za pomocą całek.

5.5.4 Zauważyć, że dla miary znakowanej ν , $|\nu|(A) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\nu(B) = 0$ dla każdego $B \subseteq A$ ($A, B \in \Sigma$).

5.5.5 Zauważyć, że jeżeli $\nu \ll \mu$ i $\nu \perp \mu$ to $\nu = 0$.

5.5.6 Zauważyć, że $\nu \ll \mu$ wtedy i tylko wtedy gdy $\nu^+, \nu^- \ll \mu$ i że podobną własność ma relacja singularności miar.

5.5.7 Twierdzenie RN nie musi zachodzić dla μ , które nie są σ -skończone. Niech Σ będzie σ -ciałem generowanym przez przeliczalne podzbiory $[0, 1]$; rozważyć miarę liczącą μ na Σ oraz zerojedynkową miarę ν na Σ .

5.5.8 Uzupełnić szczegóły dowodu Wniosku 5.3.2 według podanego szkicu.

5.5.9 Niech μ, ν będą σ -skończonymi miarami na Σ , takimi że $\nu \ll \mu$ i $\mu \ll \nu$. Wykazać, że prawie wszędzie zachodzi zależność

$$\frac{d\nu}{d\mu} = 1 / \frac{d\mu}{d\nu}.$$

5.5.10 Niech μ, ν będą miarami σ -skończonymi, $\nu \ll \mu$ i niech funkcja $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ będzie wszędzie dodatnia. Sprawdzić, że $\mu \ll \nu$.

5.5.11 Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią probabilistyczną i niech $\mathcal{A}$ będzie σ -ciałem zawartym w Σ . Wykazać, że dla każdej Σ -mierzalnej funkcji całkowalnej $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje $\mathcal{A}$ -mierzalna funkcja g , taka że dla każdego $A \in \mathcal{A}$

$$\int_A g \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

(Taka $g = E(f|\mathcal{A})$ nazywa się w probabilistyce warunkową wartością oczekiwaną.)

5.5.12 Dystrybuantą miary probabilistycznej μ na $Bor(\mathbb{R})$ nazywamy funkcję $F_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, daną wzorem $F_\mu(x) = \mu(-\infty, x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Sprawdzić, że F_μ jest niemalejącą funkcją lewostronnie ciągłą, przy czym $\lim_{x \rightarrow \infty} F_\mu(x) = 1$.

UWAGA: Czasami przyjmuje się definicję $F_\mu(x) = \mu(-\infty, x]$; jak wpływa to na własności F_μ ?

5.5.13 Wykazać, że dystrybuanta F_μ jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy μ znika na punktach.

5.5.14 Miara znikająca na punktach bywa nazywana miarą ciągłą. Wykazać, że probabilistyczna miara μ na $Bor(\mathbb{R})$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezatomowa.

5.5.15 Jak już wiemy (!) na zbiorze trójkowym Cantora C istnieje miara probabilistyczna μ , która znika na punktach. Niech $F(x) = \mu((-\infty, x))$ będzie dystrybuantą tej miary. Zauważyć, że F jest funkcją ciągłą, oraz $F[C] = [0, 1]$. Wywnioskować stąd, że obraz zbioru miary zero przez funkcję ciągłą nie musi być miary zero, a nawet nie musi być mierzalny.

5.5.16 Obliczyć (albo sprowadzić do znanej całki); podać uzasadnienia rachunków:

(i) $\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu$ gdzie $\mu = \delta_0$, $\mu = \delta_0 + \delta_1$, $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ (tutaj δ_x oznacza miarę probabilistyczną skupioną w punkcie x).

(ii) $\int_{[0,1]} x^2 d\lambda$;

(iii) $\int_{[0,1]} f d\lambda$; gdzie $f(x) = x$ dla $x \notin \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{Q}$;

(iv) $\int_{[0,2\pi]} \sin x d\mu$, gdzie $\mu(A) = \int_A x^2 d\lambda(x)$;

(v) $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$; gdzie $f(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ dla $x \notin \mathbb{Q}$;

(vi) $\int_{\mathbb{R}} 1/(x^2 + 1) d\lambda(x)$;

(vii) $\int_{\mathbb{R}} \cos x d\mu$, gdzie $\mu(A) = \int_A 1/(x^2 + 1) d\lambda(x)$;

(viii) $\int_{\mathbb{R}} \cos x d\mu$, gdzie μ jest taka że $\mu(-\infty, x) = \arctg x + \pi/2$;

(ix) $\int_{[0,\infty)} [x] d\mu$, gdzie μ jest taka że $\mu[n, n+1) = n^{-3}$;

(x) $\int_{\mathbb{R}} (x - [x]) d\mu$, gdzie

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n+1/n};$$

(xi)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \frac{n^2 x + 2}{n^2 x + n + 3} d\lambda(x) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,\infty]} \frac{n}{xn^2 + 3} d\lambda(x).$$

5.5.17 Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie mierzalną funkcją na przestrzeni miarowej (X, Σ, μ) . Wtedy wzór $\nu(B) = \mu(f^{-1}[B])$ definiuje miarę borelowską na $\mathbb{R}$, por. Zadanie 16 z poprzedniego rozdziału (taka miara w probabilistyce nazywa się rozkładem zmiennej losowej).

Udowodnić, że $\int_X g \circ f d\mu = \int_{\mathbb{R}} g d\nu(x)$ (o ile całki mają sens).

WSKAZÓWKA: Rozważyć najpierw przypadek, gdy g jest funkcją charakterystyczną; potem funkcje proste itd.

6. Problemy

5.6.A Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową. Dla dowolnego $Z \subseteq X$ piszemy $\mu^*(Z) = \inf\{\mu(A) : A \in \Sigma, Z \subseteq A\}$. Zauważyć, że μ^* jest miarą zewnętrzną (jest przeliczalnie podaddytywna i monotoniczna), ale na ogół nie jest addytywna.

Udowodnić, że dla ustalonego $Z \subseteq X$ wzór $\nu(A \cap Z) = \mu^*(A \cap Z)$ definiuje miarę na σ -ciele $\{A \cap Z : A \in \Sigma\}$ podzbiorów Z .

5.6.B Istnieje przestrzeń metryczna $Z \subseteq [0, 1]$ i probabilistyczna miara ν na $Bor(Z)$, taka że $\nu(K) = 0$ dla $K \subseteq Z$ zwartych.

WSKAZÓWKA: Wziąć na początek $Z \subseteq [0, 1]$ niemierzalny w sensie Lebesgue'a i miarę ν z poprzedniego problemu.

5.6.C Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią probabilistyczną. Jak wiemy, $A \sim B \iff \mu(A \triangle B) = 0$ definiuje relację równoważności. Niech $\mathfrak{B} = \{[A] : A \in \Sigma\}$ oznacza rodzinę klas abstrakcji tej relacji.

Zauważyć, że na $\mathfrak{B}$ można wprowadzić naturalne działania

$$[A] \vee [B] = [A \cup B], \quad [A] \wedge [B] = [A \cap B], \quad -[A] = [A^c].$$

Wtedy $\mathfrak{B}$ staje się algebrą Boole'a $(\mathfrak{B}, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ (to znaczy, że wprowadzone działania mają takie same własności jak "zwykłe" działania mnogościowe; $0 = [\emptyset]$, $1 = [X]$). Tak zdefiniowana algebra nazywamy algebrą miary.

5.6.D Sprawdzić, że algebra miary $\mathfrak{B}$ jest przestrzenią metryczną, gdzie metrykę zadajemy wzorem $d([A], [B]) = \mu(A \triangle B)$. Udowodnić, że metryka ta jest zupełna.

5.6.E Algebra miary Lebesgue'a λ na $[0, 1]$ jest przestrzenią ośrodkową.