Miara i całka — klasówka 26.11.2025 — 90 min.

Imię i nazwisko	Grupa	zad. 1	zad. 2	zad. 3	zad. 4	zad. 5

1. Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną półprostych postaci $[a,\infty)$, gdzie $a \geqslant 0$ jest liczbą wymierną. Wyjaśnić, dlaczego każdy przeliczalny zbiór $A \subseteq (0,\infty)$ należy do $\sigma(\mathcal{P})$, σ-ciała generowanego przez $\mathcal{P}$.

2. Niech μ będzie miarą, określoną na σ-ciele $\mathcal{A}$ podzbiorów X. Udowodnić, że jeżeli ciąg A_n zbiorów z $\mathcal{A}$ spełnia warunek $\mu(A_n \setminus A_{n+1}) = 0$ dla dowolnej liczby n to

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

3. Uzasadnić krótko poniższe stwierdzenia dotyczące miary Lebesgue'a λ i zbioru borelowskiego $A \subseteq \mathbb{R}$ miary Lebesgue'a 1.

(a) $\lambda(A \cap (-n,n)) > 3/4$ dla pewnej liczby naturalnej n;

(b) Istnieje zbiór domknięty $F \subseteq [0,2] \setminus A$, taki że $\lambda(F) > 3/4$.

4. Niech $f_n : X \to [0,\infty)$ będzie ciągiem nieujemnych funkcji, mierzalnych względem σ–ciała Σ podzbiorów X. Sprawdzić bezpośrednio (wypisując odpowiedni wzór), że następujące zbiory należą do Σ:

(i) $A = \{x \in X : \sup_n f_n(x) > 3\}$;

(ii) $B = \{x \in X : \sup_n f_n(x) \geqslant 3\}$;

(iii) $C = \{x \in X : \sum_n f_n(x) = \infty\}$.

Instrukcja: Pracę należy podpisać i oddać tę kartkę. Można podać rozwiązania na odwrocie i dołączonych kartkach.