## Zadanie domowe

Zadanie polega na opisaniu rozwiązań 5 zadań/problemów, wybranych z następującej listy

(i) Rozdział 1: Zadania 12, 34; Problemy A, B, F, G, $\boxed{\text{H+I}}$, J;

(ii) Rozdział 2: Zadania $\boxed{\text{8+9}}$, $\boxed{\text{12+13}}$, 18, 19, Problemy A,B, C, D;

(iii) Rozdział 3: Zadania 11, 14, 18, $\boxed{\text{19+20}}$, 21, 22;

(iv) Problemy z Dodatkowej Listy (dla wybrednych:-), patrz niżej).

Tutaj, na przykład $\boxed{\text{12+13}}$ oznacza, że te dwa zadania traktujemy jako jedno. Wybrane zadania powinny pochodzić przynajmniej z **dwóch** rozdziałów.

## Oddanie

Zadania należy oddać do godz. 12.00 dnia **7 stycznia 2024**, do rąk własnych lub na moją półkę w portierni.

## Uwagi

(a) Rozwiązania powinny być starannie zredagowane i czytelnie napisane, ręcznie lub drukiem.

(b) Rozwiązania nie muszą być autorskie; można rozwiazanie gdzieś przeczytać lub nauczyć się metody od innej osoby. Ważne, aby rozwiązanie zredagować samodzielnie, z pełnym zrozumieniem.

(c) Mechaniczne kopiowanie cudzych rozwiązań jest nielegalne.

(d) Należy wybrać zadania/problemy na miarę swoich możliwości.

## Lista Dodatkowa

LD(A) Niech $\mu$ i $\nu$ będą dwiema bezatomowymi miarami probabilistycznymi, okreslonymi na borelowskich podzbiorach $[0, 1]$. Udowodnić, że istnieje przedział $[a, b] \subseteq [0, 1]$, taki że

$$\mu([a, b]) = \nu([a, b]) = 1/2.$$

LD(B) Niech $\mu$ i $\nu$ będą dwiema bezatomowymi miarami probabilistycznymi, określonymi na pewnym $\sigma$-ciele $\Sigma$ podzbiorów $X$. Udowodnić, że istnieje $A \in \Sigma$, taki że $\mu(A) = \nu(A) = 1/2$.

LD(C) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną względem miary Lebesgue'a. Zbadać, czy dla każdego zbieżnego do zera ciągu $x_n \in \mathbb{R}$, oznaczając $f_n(x) = f(x + x_n)$, można stwierdzić, że ciąg $f_n$ zbiega do $f$ prawie wszędzie.

Sugestie: zapewne *tak*, gdy szereg $\sum_n x_n$ jest zbieżny; zapewne *nie* w przeciwnym przypadku (a kontrprzykład $f$ jest funkcją charakterystyczną).