Nieskończone twierdzenia Ramseya

1. Wykazać, że każdy ciąg $x_n \in \mathbb{R}$ zawiera podciąg stały, podciąg rosnący lub podciąg malejący.

2. Wykazać, że dla dowolnej skończonej rodziny różnowartościowych funkcji $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ istnieje nieskończony zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, na którym wszystkie te funkcje są monotoniczne.

3. Wykazać, że każdy nieskończony zbiór częściowo uporządkowany zawiera nieskończony łańcuch lub nieskończony antyłańcuch.

4. Niech $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie częściowo uporządkowany 'po osiach', czyli $(n_1, n_2) \preceq (k_1, k_2)$ gdy $n_1 \leqslant k_1$ i $n_2 \leqslant k_2$. Udowodnić, że każdy nieskończony $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zawiera nieskończony łańcuch w porządku $\preceq$.

5. Uogólnić poprzednie zadanie na przypadek $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

6. Niech $A \subseteq \mathbb{N}$ będą zbiorami takimi że $|A_n \triangle A_k| \geqslant 7$ dla $n \neq k$. Udowodnić, że istnieje ciąg $n_1 < n_2 < \ldots$, taki że

(i) $|A_{n_i} \setminus A_{n_j}| \geqslant 4$ dla wszystkich $i > j$, lub

(ii) $|A_{n_i} \setminus A_{n_j}| \geqslant 4$ dla wszystkich $i < j$.

Skończone Twierdzenia Ramseya

7. Krawędzie grafu pełnego K_6 pokolorowano dwoma kolorami. Udowodnić, że graf zawiera jednokolorowy trójkąt. Pokazać na przykładzie, że taki fakt nie zachodzi dla grafu K_5. W oznaczeniach z wykładu oznacza to, że $R(3,3) = 6$.

8. Krawędzie grafu K_{17} pokolorowano trzema kolorami. Udowodnić, że graf zawiera jednokolorowy trójkąt. Sprawdzić, że liczba 16 jest tutaj za mała. W analogicznej notacji (dla trzech kolorów) zadanie oznacza, że $R(3,3,3) = 17$. Jak twierdzi Wikipedia, nie wiadomo czy $R(3,3,4) = 30$ czy też 31. Może nam się uda:-)

9. Jak wiemy z wykładu, $R(n,n) \leqslant \binom{2n-2}{n-1}$. Znaleźć oszacowanie na $R(n,n,n)$; na przykład zauważyć, że dla $N = R(n,n)$ zachodzi $R(n,n,n) \leqslant R(N,N)$.

10. Udowodnić, że dla każdego $r \in \mathbb{N}$ istnieje $S(r)$ (liczba Schura), to jest taka liczba naturalna, że dla dowolnego kolorowania elementów z $A = \{1, 2, \ldots, S(r)\}$ istnieją trzy elementy $x, y, z \in A$ tego samego koloru, spełniające równanie $x + y = z$.

Wskazówka: W razie trudności patrz 3.1 w tym opracowaniu.