Kojarzenie par

Przypomnijmy, że w danym grafie dwudzielnym $G = (S, T, E)$, jeżeli $M \subseteq E$ jest skojarzeniem par to poszukiwanie łańcucha alternującego przebiega następująco:

(i) nadaj etykietę (*) wszystkim tym wierzchołkom z S, które nie mają pary w M;

(ii) jeśli $s_i \in S$ dostał w poprzednim ruchu etykietę, nadaj etykietę (s_i) tym wierzchołkom z T, które są połączone krawędzią **spoza** M i dotychczas nie miały etykiety;

(iii) jeśli $t_i \in T$ dostał w poprzednim ruchu etykietę, nadaj etykietę (t_i) tym wierzchołkom z S, które są połączone krawędzią **z** M i nie miały etykiety.

Każdy wierzchołek może dostać co najwyżej jedną etykietę. Jeżeli etykietę dostał wolny wierzchołek z T to w ten sposób znajdujemy łańcuch alternujący. Warto poćwiczyć!

1. Zauważyć, że twierdzenie Halla o małżeństwach i twierdzenie o SRR są równoważne w tym sensie, że jedno łatwo wynika z drugiego.

2. Zauważyć, że jeśli w grafie dwudzielnym $G = (S, T, E)$ stopień każdego wierzchołka z S jest dodatni i nie mniejszy niż stopień dowolnego wierzchołka z T to w G można skojarzyć $|S|$ par.

3. Zauważyć, że jeżeli w grafie dwudzielnym $G = (S, T, E)$, gdzie $|S| = |T| = n$ nie ma zbiorów blokujących mocy $< n$ to graf spełnia warunek Halla $|G[A]| \geqslant |A|$ dla każdego $A \subseteq S$.

4. Wyprowadzić twierdzenie Halla o małżeństwach z twierdzenia Königa-Egerváry'ego:

W grafie dwudzielnym maksymalna liczba skojarzonych par jest równa minimalnej mocy zbioru blokującego.

5. Dana jest szachownica $m \times n$, w której niektóre pola są zakazane (na przykładzie zaznaczane krzyżykami). Zadanie polega na umieszczeniu maksymalnej liczby niezależnych pionków na pozostałych polach; pionki są niezależne jeśli żadne dwa nie stoją w tej samej kolumnie i tym samym wierszu. Zauważyć, że jest to inna wersja zagadnienia kojarzenia w grafie dwudzielnym. W związku z tym dla danego ustawienia etykietowanie (poszukujące lepszego ustawienia) wygląda następująco (dlaczego?):

(a) Nadajemy etykiete $(-)$ wierszom bez pionków;

(b) dla danego wiersza i z etykietą nadajemy etykietę (i) tym kolumnom, które na przecięciu z tym wierszem mają dopuszczalne pole wolne;

(c) dla danej kolumny j z etykietą nadajemy etykietę (j) tym wierszom. które na przecięciu mają pionek; wracamy do (b).

Przykładowy zestaw do ćwiczeń :

○	×	×					1
	×	×	×	×	○	×	2
	○	×	×				3
×		×	×	×		×	4
		×	×	×	×	×	5
1	2	3	4	5	6	7	

6. Wąskie gardło. Dla danej macierzy $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ szukamy takiej permutacji σ, która maksymalizuje wielkość

$$v(\sigma) = \min_{k\leqslant n} a_{k\sigma(k)}.$$

Taki problem powstaje, gdy mamy n pracowników i taśmę produkcyjną złożoną z n stanowisk pracy. Pracownik i osiąga wydajność a_{ij} pracując na stanowisku j. Zauważmy, że taka optymalna permutacja maksymalizuje wydajność taśmy.

Dla danej permutacji σ rozważamy szachownicę $n \times n$. Pole (i, j) uznajemy za dopuszczalne gdy $a_{ij} > v(\sigma)$ i niedopuszczalne w przeciwnym razie. Zauważyć, że σ nie jest optymalna tylko wtedy gdy na tej szachownicy można ustawić n niezależnych pionków.

7. Zoptymalizować prace 6 pracowników przy podanej poniżej tabeli wydajności rozpoczynając od przypadkowej permutacji.

1	3	2	6	0	1
4	2	3	8	3	1
8	1	1	5	0	9
3	5	4	8	8	3
2	6	9	5	2	4
3	2	3	6	7	1