Grafy

1. Dany jest spójny graf G o $n \geqslant 3$ wierzchołkach oraz $k \leqslant n$. Załóżmy, że dla każdej pary różnych, niepołączonych wierzchołków zachodzi $\deg(v)+\deg(w) \geqslant k$. Pokazać, że G zawiera ścieżkę długości k (czyli ścieżkę o k krawędziach).

2. Załóżmy, że spójny graf G ma dokładnie $2k > 0$ wierzchołków stopnia nieparzystego. Pokazać, że G można rozłożyć na k krawędziowo rozłącznych ścieżek, a na mniej nie można.

3. W pełnym grafie K_n (mającym n wierzchołków i wszystkie krawędzie) jest n^{n-2} drzew rozpinających. Przypomnijmy, że kod Prüfera wyznacza bijekcję pomiędzy zbiorem drzew rozpinających i zbiorem $C = \{1, \ldots, n\}^{n-2}$, działając według recepty

Dla grafu mającego co najmniej 2 krawędzie zapisz numer wierzchołka, do którego przyłączony jest liść o najmniejszym numerze; następnie usuń ten liść.

Zauważyć, że różne drzewa rozpinające mają różne kody. Udowodnij, że każdy ciąg ze zbioru C koduje pewne drzewo rozpinające.

Grafy — zadania uzupełniające

4. Pokazać, że dowolny graf G ma spójny podgraf G' taki, że minimalny stopień wierzchołka w G' jest nie mniejszy niż połowa średniego stopnia wierzchołka w G. Podać przykład grafu G, w którego każdym (niepustym) podgrafie istnieje wierzchołek stopnia niższego niż średni stopień wierzchołka w G.

5. Dany jest spójny graf $G = (V, E)$ i funkcja $c : E \to \mathbb{R}_+$ wyznaczająca koszty krawędzi. Udowodnić, że jeżeli c jest różnowartościowa to istnieje jedyne minimalne drzewo rozpinające $T = (V, E')$ grafu, to jest jedyne drzewo minimalizujące wielkość $c(E') = \sum_{e \in E'} c(e)$.

6. *Grafem dualnym* do grafu planarnego (V, E) (wyznaczającego zbiór ścian F) nazwiemy graf (F, E), w którym każda krawędź łączy obszary, które rozdziela.

Inaczej mówiąc, można utożsamić ścianę $f \in F$ z pewnym punktem p_f do niej należącym i połączyć krawędziami te pary p_f i p_g, dla których ściany f i g mają wspólną krawędź w wyjściowym grafie.

Pokazać, że jeśli (V, E') jest drzewem rozpinającym w planarnym grafie (V, E) to $(F, E \setminus E')$ jest drzewem rozpinającym w grafie dualnym (F, E). Wywnioskować stąd formułę Eulera.

Systemy różnych reprezentantów (SRR)

Przypomnijmy, że ciąg zbiorów $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ ma system różnych reprezentantów (SRR), zwany też transwersalą, jeżeli istnieją **różne** punkty $x_1, \ldots, x_n$, takie że $x_i \in A_i$ dla każdego $i \leqslant n$.

7. Niech $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ będzie ciągiem zbiorów, posiadającym SRR. Niech x będzie elementem z A_1. Pokazać, że istnieje SRR zawierający x; pokazać na przykładzie, że może nie istnieć SRR, w którym x reprezentuje A_1.

8. Niech $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ będzie ciągiem zbiorów spełniającym silniejszy Warunek Halla

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}| \geqslant k + 1,$$

dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$ i dowolnego wyboru k różnych indeksów $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Niech x będzie elementem z A_1. Pokazać, że $\mathcal{A}$ ma SRR, w którym x reprezentuje A_1.

9. Pokazać, że ciąg zbiorów

$$A_i = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

posiada SRR oraz liczba różnych SRR tego ciągu jest równa n-tej liczbie nieporządków D_n.

10. Udowodnić, że jeżeli każdy zbiór z ciągu $\mathcal{A}$ ma $\geqslant d$ elementów, a każdy punkt należy do co najwyżej d zbiorów z $\mathcal{A}$ (gdzie $d > 0$ jest ustalone) to taki ciąg ma SRR.

11. Udowodnić, że ciąg $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ niepustych podzbiorów skończonego zbioru X ma SRR wtedy i tylko wtedy gdy $|\{i : A_i \subseteq Y\}| \leqslant |Y|$ dla każdego $Y \subseteq X$.

12. Po rozgrywce brydżowej talia 52 kart jest podzielona na 13 lew po 4 karty. Udowodnić, że można z każdej lewy wybrać po jednej karcie, tak aby otrzymać wszystkie figury $2, 3, \ldots, 10, W, D, K, A$ (bez uwzględniania kolorów).