## 13. Kojarzenie par i blokowanie wierzchołków

Ogólnie rzecz ujmując, zagadnienie optymalizacji dyskretnej polega na znalezieniu największej (lub najmniejszej) wartości funkcji $g : X \to \mathbb{R}$ na zbiorze skończonym $X$. Oczywiście można zawsze przejrzeć wszystkie wartości $g(x)$ dla $x \in X$ i wybrać tę największą, ale na ogół, jeżeli zbiór $X$ jest duży, nie jest to dobry pomysł.

Dla zagadnienia 'szukamy $\max_{x\in X} g(x)'$ można czasami rozważyć inne zagadnienie, zwane dualnym postaci $\min_{y\in Y} g^*(y)$, które jest związane z wyjściowym w ten sposób, że $g(x) \leqslant g^*(y)$ dla dowolnych $x \in X$ i $y \in Y$. Przypuśćmy, że znaleźliśmy takie dualne zagadnienie oraz $g(x_0) = g^*(y_0)$ dla pewnych $x_0 \in X$ oraz $y_0 \in Y$. Wtedy udaje się jednocześnie rozwiązać oba problemy: dla dowolnych $x \in X$, $y \in Y$ mamy

$$g(x) \leqslant g^*(y_0) = g(x_0) \leqslant g^*(y),$$

więc funkcja $g$ przyjmuje największą wartość w $x_0$, a funkcja $g^*$ w $y_0$ przyjmuje wartość najmniejszą. Zastosujemy ten pomysł to problemu 'ile par można skojarzyć w danym grafie dwudzielnym'.

**Definicja 13.1.** Dla danego grafu dwudzielnego $G = (S, T, E)$, zbiór $B \subseteq S \cup T$ nazywamy zbiorem blokującym jeżeli $B \cap \{s, t\} \neq \emptyset$ dla każdej krawędzi $\{s, t\} \in E$.

Mówiąc obrazowo, każda krawędź w grafie jest zablokowana przez element z $B$, albo na wierzchołku 'lewym' z $S$, alno na tym 'prawym' z $T$.

**Lemat 13.2.** *Jeżeli $M$ jest kojarzeniem par w grafie dwudzielnym $G = (S, T, E)$, a $B$ jest zbiorem blokującym w tym grafie to $|M| \leqslant |B|$.*

*Dowód.* Każda krawędź z $M$ jest zablokowana przez wierzchołek z $B$; różne krawędzie z $M$ muszą być blokowane przez różne wierzchołki (co wynika z definicji kojarzenia par); stąd teza. □

W ten sposób widzimy, że problem ' znajdź minimalną ilość blokujących wierzchołków' jest dualny do zagadnienia 'znajdź maksymalne kojarzenie par' (oczywiście dla ustalonego grafu dwudzielnego). Jesteśmy gotowi na to, aby udowodnić, że algorytm szukania maksymalnego kojarzenia par w danym grafie dwudzielnym działa prawidłowo.

**Twierdzenie 13.3.** *Niech $M$ bedzie kojarzeniem w grafie $G = (S, T, E)$. Jeżeli algorytm etykietujący nie znajdzie łańcucha alternującego, to $M$ jest maksymalnym kojarzeniem w tym grafie.*

*Dowód.* Rozważmy moment zatrzymania się algorytmu etykietującego: niech $L \subseteq S \cup T$ będzie zbiorem tych wierzchołków, którym nadano etykietę (ang. *label*). Niech

$$B = (S \setminus L) \cup (L \cap T).$$

Sprawdzimy, że $B$ jest zbiorem blokującym oraz $|B| = |M|$; na podstawie wcześniejszych rozważań pokaże to, że kojarzenie $M$ jest maksymalne. Poniższe rozważania wygodnie jest śledzić na rysunku - przykładowy szkic znajduje się na końcu tekstu (ale lepiej zrobić własny). Kluczowe są dwa spostrzeżenia.

(1) Nie ma w grafie krawędzi $\{s, t\}$, takich że $s \in S \cap L$ i $t \in T \setminus L$ (nie ma połączeń pomiędzy lewą górną częścią i prawą dolną). Istotnie, taka krawędź nie może być w $E \setminus M$ bo wtedy algorytm nadałby etykietę wierzchołkowi $t$ (jako że $s$ ma etykietę). Z drugiej strony, jeśli $\{s, t\} \in M$ to $s$ nie ma etykiety (*) (bo ma parę w kojarzeniu); $s$ musi mieć więc etykietę $t_1$ dla pewnego $t_1 \in T \cap L$. Wtedy z $s$ wychodzą dwie różne krawędzie należace do $M$, a to jest sprzeczne z definicją kojarzenia.

(2) Nie ma w $M$ krawędzi $\{s, t\}$, takich że $s \in S \setminus L$ i $t \in T \cap L$ (nie ma w $M$ połączeń pomiędzy lewą dolną częścią i prawą górną). Istotnie, gdyby taka krawędź była to $s$ dostałby etykietę $(t)$.

Uwaga (1) oznacza bezpośrednio, że $B$ jest zbiorem blokującym; sprawdźmy, że $|B| = |M|$.

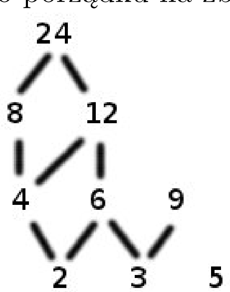
Dla każdego $s \in S \setminus L$ istnieje $t \in T$, taki że $\{s, t\} \in M$ (gdyby $s$ nie miał pary to dostałby etykietę (*). Taki $t$ musi spełniać $t \in T \setminus L$, co wynika z (2). Każdy $t \in T \cap L$ ma parę (inaczej, gdy etykietę dostaje wierzchołek bez pary, otrzymujemy łańcuch alternujący). Z konieczności (patrz (2)) istnieje $s' \in S \cap L$ taki że $\{s', t\} \in M$. Wynika stąd. że różne wierzchołki z $B$ należa do różnych krawędzi z $M$. Stąd $|B| \leqslant |M|$ (nierówność w drugą stronę jest zawsze prawdziwa). $\square$

Zauważmy, że algorytm jest genialny: podał opis poprawności swojego działania oraz udowodnił poniższe twierdzenie.

**Wniosek 13.4** (König & Egervary). *W grafie dwudzielnym minimalna liczna blokujących wierzchołków jest równa maksymalnej liczbie skojarzonych par.*

## 14. Twierdzenie Dilworha

Zilustrujemy pomysły z poprzedniego rozdziału innym zagadnieniem. Dla danego zbioru $P$ relację $\preceq$ nazywamy relacją częściowego porządku jeżeli $x \preceq x$, warunki $x \preceq y$ i $y \preceq x$ implikuje $x = y$ oraz $x \preceq x, y \preceq z$ pociąga $x \preceq z$ dla dowolnych $x, y, z \in P$ (czyli relacja $\preceq$ jest zwrotna, słabo antysymetryczmna i przechodnia). Porządki częściowe tym się różnią od liniowego, że pewne elementy mogą być nieporównywalne; $x, y \in P$ sa nieporównywalne, jeżeli nie zachodzi $x \preceq y$ i nie zachodzi $y \preceq x$. Naturalnym przykładem częściowego porządku jest $\subseteq$ (na rodzinie podzbiorów ustalonego zbioru). Inny przykład: dla liczb naturalnych relacja $x|y$ ($x$ dzieli $y$) jest częściowym porządkiem. Poniżej typowa ilustracja tego porządku na zbiorze wybranych liczb (rys. Michał Korch, MIM UW):



**Definicja 14.1.** W zbiorze częściowo uporządkowanym $(P, \preceq)$

(i) zbiór $C \subseteq P$ nazywamy **łańcuchem**, jeżeli $C$ jest liniowo uporządkowany przez $\preceq$;
(ii) zbiór $A \subseteq P$ nazywamy **antyłańcuchem** jeżeli każde dwa różne element z $A$ są nieporównywalne.

W przykładzie powyżej $A = \{4, 6, 9, 5\}$ jet antyłańcuchem; zbiór $C = \{2, 4, 8, 24\}$ jest łańcuchem.

Niech $(P, \preceq)$ będzie skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym. Rozważmy zagadnienie, jaka jest maksymalna moc antyłańucha w $P$ oraz dualne do niego zagadnienie, jaka jest minimalna liczba łańcuchów, na jakie można rozłożyć $P$. W przykładzie obie liczby wynoszą 4, proszę sprawdzić, i to nie jest przypadek. Dualność tych zagadnień wynika stąd, że jeżeli $P = C_1 \cup \ldots C_m$ jest rozkładem na łańcuchy to $m$ ogranicza z góry moc każdego antyłańcucha $A$ w $P$, jako ze $|A \cap C_i| \leqslant 1$).

**Twierdzenie 14.2** (Dilworth)**.** *W skończonym zbiorze częściowo uporządkowanym maksymalna moc antyłańcucha jest równa minimalnej liczbie łańcuchów, na jakie ten zbiór można rozłożyć.*

*Dowód.* Możemy założyć, że nasz zbiór to $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ z daną relacją częściowego porządku $\preceq$. Piszemy oczywiście $x \prec y$ jeżeli $x \preceq y$ i $x \neq y$.

Rozważymy zbiór $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ oraz $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ oraz graf dwudzielny $G = (S, T, E)$' gdzie definiujemy krawędzie z $E$ poprzez warunek

$$\{s_i, t_j\} \in E \iff i \prec j.$$

Idea tej konstrukcji jest taka, że zarówno $s_i$, jak i $t_i$ reprezentują element $i$ zbioru częściowo uporządkowanego, przy czym $s_i$ służy do zaznaczania, od czego $i$ jest mniejsze, a $t_i$ od czego $i$ jest większe.

Dowód odwoła się do Wniosku 13.4 po sprawdzeniu dwóch faktów.

Teza 1. Jeżeli $M$ jest kojarzeniem par w grafie $G$ to $P$ można rozłożyć na $n - |M|$ łańcuchów.

Istotnie, krawędzie z $M$ jednoznacznie wyznaczają rozkład $P$ na łańcuchy. Na przykład, jeżeli, dla $n = 4$ mamy $M = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ to te pary tworzą rozłączne łańcuchy; jeżeli natomiast $M = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ to łańcuchami są $\{1, 2, 3\}$ oraz $\{4\}$. Każda skojarzona przez $M$ para automatycznie zmniejsza liczbę potrzebnych łańcuchów o 1; stąd teza.

Teza 2. Jeżeli $B$ jest zbiorem blokującym w grafie $G$ to w $P$ istnieje antyłańcuch mocy $\geqslant n - |B|$.

Niech $B \cap S = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}\}$ i niech $B \cap T = \{t_{i_1}, \ldots, t_{i_m}\}$. Wtedy zbiór

$$A = P \setminus (\{i_1, \ldots, i_k\} \cup \{j_1, \ldots, j_m\})$$

jest antyłańcuchem: różne $i, j \in A$ są nieporównywalne jako że każda relacja między nimi jest zablokowana. Ponadto, $|A| \geqslant n - (k + m) = n - |B|$.

Z Wniosku 13.4 istnieje kojarzenie $M$ i zbiór blokujący $B$, takie że $|M| = |B|$. Na podstawie Tezy 1 i 2 stwierdzamy, że w zbiorze $P$ istnieje antyłańcuch równy co do mocy liczbie łańcuchów, na jakie można $P$ rozłożyć. $\square$

**Ilustracja do dowodu Twierdzenia 13.3**