9. Systemy różnych reprezentatntów

Odpocznijmy na chwilę od grafów i rozważmy następujący przykład.

Przykład 9.1. Pan Bazyli Żuczek[1] prowadzi dobrze prosperujący zakład samochodowy i zatrudnia 5 fachowców. Trzech spośród nich potrafi lakierować, 4 wymieniać opony, dwóch serwisuje elektronikę, 3 wymienia olej, dwóch naprawia klimatyzację. Dziś rano pan Bazyli stwierdził, że ma wykonać wszystkie te czynności w pięciu różnych samochodach. Czy uda się przydzielić wszystkim pracę?

Jak widać pracownicy posiadają na ogół kilka umiejętności. Oczywiście odpowiedź zależy od tego, jak się te umiejetności rozkladają. Problem polega na tym, aby z każdej grupy (lakierników, elektryków etc.) wybrać reprezentanta i ci reprezentanci muszą być różni. Zauważmy, że jeżeli trzech pracowników tworzy grupę posiadająca wyłączność na 4 umiejetności, to będzie klops.

Definicja 9.2. Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będzie ciągiem zbiorów, zawartym w pewnym skończonym zbiorze X. Mówimy, ze ciąg ten mam system różnych reprezentantów (SRR) jeżeli istnieją parami różne $x_1, x_2, \ldots, x_n$, takie że $x_i \in A_i$ dla każdego i.

Nietrudno odkryć, że warunkiem koniecznym dla istnienia SSR jest to, aby zbiory były niepuste, każde dwa zbiory miały w sumie przynajmniej 2 elementy, każde trzy, przynajmniej 3 etc. Ogólniej,

$$(WH) \qquad \left|\bigcup_{k\in I} A_k\right| \geqslant |I| \qquad \text{dla każdego } I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Istotnie, jesli ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest SSR to

$$\left|\bigcup_{k\in I} A_k\right| \geqslant |\{x_k : k \in I\}| = |I|.$$

Warunek WH nazywamy warunkiem Halla, tak jak poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 9.3 (Halla, o systemie różnych reprezentantów)**.** *Warunek WH jest konieczny i dostateczny na to, aby ciąg $A_1, A_2, \ldots, A_n$ miał SRR.*

Dowód. Dowód dostateczności warunku Halla przeprowadzimy przez indukcję po ilości zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$. W kroku indukcyjnym wyróżnimy dwa przypadki.

Rozważmy $n \geqslant 2$ zbiorów i przypuśćmy, że warunek Halla zachodzi w mocniejszej postaci

$$(WH^+) \qquad \left|\bigcup_{k\in I} A_k\right| \geqslant |I| + 1 \qquad \text{dla każdego } I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, \text{spełniającego } |I| < n.$$

Wtedy $A_n \neq \emptyset$; dla dowolnego $x_n \in A_n$ rozważmy zbiory $A_1 \setminus x_n, \ldots, A_{n-1} \setminus \{x_n\}$. Te zbiory spełniają zwykły warunek Halla więc z założenia indukcyjnego istnieją $x_i \in A_i \setminus \{x_n\}$ parami różne dla $i = 1, \ldots, n_1$. Wtedy $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ jest SRR dla całego ciągu.

[1] postać nie do końca fikcyjna; studiował kiedyś matematykę i prof. Szwarc może to potwierdzić

Przypadek gdy WH^+ nie zachodzi oznacza, że pewne $p < n$ zbiorów ma sumę mocy p. Bez zmniejszenia ogólności przypuśćmy, że $A_1 \cup \ldots \cup A_p = F$ i $|F| = p$. Rozważmy zbiory $A_{p+1} \setminus F, \ldots, A_n \setminus F$. Sprawdzimy, że ten ciąg zbiorów spełnia warunek Halla — wtedy możemy zastosować założenie indukcyjne osobno dla $A_1, \ldots, A_p$ i $A_{p+1} \setminus F, \ldots, A_n \setminus F$.

Dla dowolnego zbioru indeksów $J \subseteq \{p+1, \ldots, n\}$ mamy

$$\left|\bigcup_{k\in J}(A_k \setminus F)\right| = \left|\left(F \cup \bigcup_{k\in J}(A_k \setminus F)\right) \setminus F\right| = \left|\left(\bigcup_{k\in\{1,\ldots,p\}\cup J} A_k\right) \setminus F\right| \geqslant p+|J|-p = |J|,$$

czyli zadanie wykonane. □

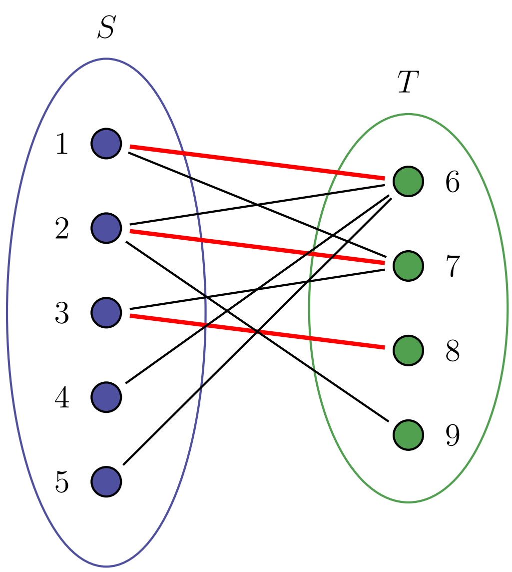
10. Kojarzenie par w grafach dwudzielnych

Twierdzenie 9.3 jest eleganckie i użyteczne, ale tylko z teoretycznego punktu widzenia. Co by powiedział pan Bazyli (z 9.1), który tymczasem rozwinął działalność, ma 10 pracowników i 10 usług w ofercie? Ten Hall każde mi sprawdzić $2^{10} = 1024$ warunków i nie mówi jak owy SRR znaleźć. Spróbujemy pana Bazylego ucieszyć poniżej.

Jeżeli $G = (V, E)$ jest grafem i można zbiór wierzchołków podzielić na dwie części $V = S \cup T$ w ten sposób, że graf posiada wyłącznie krawędzie postaci $\{s, t\}$, gdzie $s \in S, t \in T$ to mówimy, że G jest grafem dwudzielnym i możemy go zapisać w postaci $G = (S, T, E)$. Przykładem takiego grafu jest rozważany wcześniej $K_{3,3}$.

Definicja 10.1. Mówimy, że $M \subseteq E$ jest kojarzeniem (ang. *matching*) par w grafie dwudzielnym $G = (S, T, E)$ jeżeli w grafie $G' = (S, T, M)$ stopień każdego wierzchołka wynosi co najwyżej 1.

Powyższa definicja oznacza, że z żadnego wierzchołka $s \in S$ nie wychodzą dwie krawędzie ze zbioru M i do żadnego $t \in T$ takie dwie krawędzie nie dochodzą. Przykład:



Na rysunku przykładowe kojarzenie zaznaczono czerwonym kolorem. Zauważmy, że kojarzenie to nic innego jak **różnowartościowa** funkcja $f : A \to T$, określona dla pewnego $A \subseteq S$, taka że $\{a, f(a)\} \in E$ dla każdego $a \in A$.

Przykład 10.2. Zagadnienie istnienia SSR dla ciągu zbiorów $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ możemy zinterpretować w języku kojarzenia par w grafach dwudzielnych:

Niech $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ (te wierzchołki reprezentują zbiory) i niech $T = X$ (te wierzchołki reprezentują punkty). Rozważamy graf $G = (S, T, E)$, gdzie E jest zbiorem krawędzi postaci $\{k, x\}$, gdzie $x \in A_k$. Ciąg $A_1, \ldots, A_n$ ma SRR wtedy i tylko wtedy gdy w grafie G można skojarzyć n par.

Rozumując w ten sposób możemy zinterpretować Twierdzenie 9.3 w następujący sposób,

Twierdzenie 10.3 (Halla o małżeństwach)**.** *Niech $G = (S, T, E)$ bedzie grafem dwudzielnym; gdzie $|S| = n$. Dla dowolnego $A \subseteq S$ oznaczmy*

$$G[A] = \{t \in T : \{a, t\} \in E \text{ dla pewnego } a \in A\}.$$

W grafie G istnieje kojarzenie n par wtedy i tylko wtedy gdy $|G[A]| \geqslant |A|$ dla każdego $A \subseteq S$.

Twierdzenie ma tradycyjną, matrymonialną nazwę (S to kawalerowie, T to panny na wydaniu etc.). Zadanie dla czytelnika: Sprawdzić, że Twierdzenie 10.3 jest po prostu przetłumaczeniem Twierdzenia 9.3 na inny język.

Do końca tej części ustalamy graf dwudzielny $G = (S, T, E)$; Rozważymy następujący problem.[2]

Problem 10.4. *Ustalić, ile par można skojarzyć w G i opisać konstrukcję takiego maksymalnego skojarzenia.*

Zagadnienia optymalizacji tego typu rozwiązujemy często według schematu:

(1) Rozważamy dowolne kojarzenie (na przykład $M = \emptyset$);
(2) sprawdzamy, czy M można ulepszyć; jeśli nie to STOP;
(3) ulepszamy M do M' i powtarzamy do skutku.

Opiszamy najpierw sposób ulepszenia kojarzenia.

Definicja 10.5. Dla ustalonego kojarzenia $M \subseteq E$ par w G, **łańcuchem alternujacym** nazywamy zbiór C krawędzi postaci $\{s_1, t_1\}, \{s_2, t_2\}, \ldots, \{s_k, t_k\}$, taki że

(i) $s_i \in S$, $t_i \in T$;
(ii) $\{s_i, t_i\} \notin M$ dla $i = 1, \ldots, k$;
(iii) $\{s_{i+1}, t_i\} \in M$ dla $i = 1, \ldots, k-1$;
(iv) t_1 oraz s_k nie mają par w kojarzeniu M.

Mówiąc obrazowo: łańcuch alternujący zaczyna się w wolnym wierzcgołku z S, przeskakuje do T krawędziami spoza M, wraca do S krawędziami z M i kończy w wolnym wierzchołku z T. Przykład dla grafu z rysunku powyżej: $\{4, 6\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}, \{2, 7\}, \{2, 9\}$. Na tym przykładzie można prześledzić ulepszone skojarzenie opisane poniżej.

Lemat 10.6. *Jeżeli C jest łańcuchem alternującym dla kojarzenia M to*

$$M' = M \triangle C = (M \setminus C) \cup (C \setminus M)$$

jest kojarzeniem par i $|M'| = |M| + 1$.

[2] jego rozwiązanie zadowoli pana Bazylego

Dowód. Zauważmy, że operacja $M' = M \triangle C$ sprowadza się to tego, że wyrzucamy z M te krawędzie, które są w łańcuchu C (a było ich, w oznaczeniach z 10.5, $k-1$), natomiast dokładamy krawędzie z C które są spoza M (a jest ich k). Dlatego przybywa dodatkowa skojarzona para. □

Mając dane kojarzenie M i zastanawiając się czy jest ono optymalne, możemy więc zadać sobie pytanie: Czy istnieje łańcuch alternujący dla M? Na to pytanie odpowie opisany niżej algorytm etykietujący.

Wierzchołkom grafu nadajemy etykiety (mówiące skąd przyszliśmy, (*) to umówny początek). Wierzchołkowi możemy nadać tylko jedną etykietę. Wierzchołki przeglądamy w dowolnej kolejności; możemy umówić się, że są one ponumerowane i przedlądamy je wg numerów.

Algorytm 10.7. Dane jest kojarzenie M w grafie dwudzielnym $G = (S, T, E)$.

(1) Nadaj etykietę (*) nieposiadającym pary wierzchołkom z S.
(2) Jeżeli $s \in S$ ma etykietę to możesz nadać etykietę (s) tym wierzchołkom z T, które są połączone z s krawędzią spoza M.
(3) Jeżeli etykietę dostał nieskojarzony przez M wierzchołek z T to STOP (mamy łańcuch alternujący)
(4) Jeżeli $t \in T$ ma etykietę to możesz nadać etykietę (t) wierzchołkowi z S, który jest połączony z t krawędzią z M.
(5) Jeżeli w ostatnim ruchu nie przybyła żadna etykieta to STOP (nie ma łańcuchów alternujących i M jest maksymalnym kojareniem par w grafie).
(6) GOTO (2).

Pierwsze zadanie: zobaczmy jak etykietowanie działa na przykładzie (narysowanym powyżej, lub własnym). Jest dość jasne, że jeżeli algorytm zatrzyma się w (3) to etykiety pokażą łańcuch alternujący. To, co wymaga dowodu, to nieoczywiste stwierdzenie z (5).