1. Uzasadnić poniższe stwierdzenia, albo bezposrednim argumentem, albo opierając się na poznanych faktach:

(i) Funkcja niemalejąca $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest borelowska.

(ii) Jeżeli zbiory $A_n, A \subseteq \mathbb{R}$ są borelowskie i $\lambda(A_n \triangle A) < 1/n$ dla $n \in \mathbb{N}$ to istnieje ciąg $n_1 < n_2 < \ldots$, taki że funkcje charakterystyczne $\chi_{A_{n_k}}$ zbiegają do χ_A prawie wszędzie.

(iii) Jeżeli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem mierzalnym i $\lambda(A) = 1$ to istnieje $r > 0$, takie że

$$\lambda(A \cap (-r, r)) = 3/4.$$

2. Niech $f_n, f : (0,1) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnych, takim że $|f_n(x)| \leqslant 1/\sqrt{x}$ dla $x \in (0,1)$.

Udowodnić, że jeżeli $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ to $\lim_n \int_{[0,1]} |f_n - f| \, \mathrm{d}\lambda = 0$.

3. Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową, a $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi.

(a) Udowodnić, że jeżeli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $g_n \xrightarrow{\mu} g$ to $f_n - g_n \xrightarrow{\mu} f - g$.

(b) Wyjaśnic, dlaczego warunki $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $f_n \xrightarrow{\mu} g$ implikują, że $f = g$ μ-prawie wszędzie.

4. Obliczyć i podać **szczegółowe** uzasadnienia rachunków:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{nx^2 + 1}{nx^4 + n^2} \, \mathrm{d}\lambda(x), \qquad \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \chi_{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)} \, \mathrm{d}\lambda.$$

5. Niech funkcje mierzalne $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ spełniają warunek $\int_{[0,1]} |f_n| \, \mathrm{d}\lambda \leqslant 1$. Niech B bedzie zbiorem tych $x \in [0,1]$, dla których szereg $\sum_n \frac{f_n(x)}{n^2}$ **nie** jest zbieżny.

Udowodnić, że zbiór B jest miary zero; wyjaśnić, dlaczego spełniona jest zależność

$$\int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n^2} \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} \frac{f_n(x)}{n^2} \, \mathrm{d}\lambda.$$