

Kilka rad co do egzaminu z GATM

Droga osobo studencka,

egzamin będzie zwyczajną rozmową o matematyce i nie należy się przesadnie martwić. Poniżej przydługa lista rad i tego, czego można się spodziewać.

1. Poniżej zamieściłem listę materiału, który przerabialiśmy i o który mogę spytać na egzaminie. Serduszkami są zaznaczone obowiązki (na nich się skupię), gwiazdkami są zaznaczone rzeczy ponadprogramowe (o nie nie będę pytał, jeśli nie wyrazisz chęci ku temu).
2. Większość osób spytałem o preferencje co do materiału i będę te preferencje uwzględniał. Należy mieć jednak w głowie jakieś minimum świadomości o całym materiale z wykładu (szczególnie, że praktycznie cały materiał pojawia się w dowodzie wiadomej hipotezy).
3. **Bez wyjątku w czasie rozmowy spytam o zarys dowodu relatywnej hipotezy Mordella-Langa.** Nie trzeba znać wszystkich szczegółów technicznych, najważniejsze zrozumieć strukturę dowodu i główne pomysły. W szczególności, należy wiedzieć jaka jest rola teorii modeli w tym dowodzie, po co nam były ciała różniczkowa, rola jąder Manina (odpowiednio mała definiowalna klatka na niedefiniowalnego potwora, vide: pierwszy wykład; Magda Dudziak zrobiła piękny rysunek do tego).
4. W czasie rozmowy ważniejsze są dla mnie intuicje i świadomość różnych idei niż znajomość twardej teorii. Nie będę (raczej) dręczył pytaniami o szczegóły techniczne, raczej o duży obrazek (oczywiście definicje i sformułowania mają być ścisłe i czasami coś trzeba będzie uzasadnić porządnie). Ucieszy mnie też znajomość „genealogii idei” i skąd się różne pojęcia wzięły.
5. Do powyższego: przykłady są ważniejsze niż ogólności; dobrze mieć w głowie (sercu?) ulubioną grupę afiniczną, krzywą eliptyczną albo równanie różniczkowe.
6. Jeśli doczytałeś coś ciekawego z literatury albo skryptu, czego nie było na wykładzie a co Ci się spodobało, chętnie o tym posłucham. Pewną sugestią mogą być gwiazdki w spisie materiału poniżej. Własne pomysły są też dobre.
7. Uogólnienie poprzedniego punktu: entuzjazm i chęć opowiedzenia czegoś może skutecznie zredukować liczbę pytań, które zadam (i na które będzie czas).
8. Można śmiało zadawać mi pytania przed egzaminem (np. mailowo), w tym o czym można poopowiadać na egzaminie.

Kuba

Materiał

Ciała algebraicznie domknięte.

- ♡ Okruchy geometrii algebraicznej: zbiory algebraiczne, topologia Zariskiego, noetherowskość, pojęcie wymiaru; rozmaitości afiniczne, pierścień funkcji regularnych, *dualność algebry i geometrii*.
- ♡ Teoria ACF: eliminacja kwantyfikatorów i jej geometryczne sformułowanie (twierdzenie Chevalleya o obrazie), modelowa zupełność, uzupełnienia (tzn. ACF_p dla $p = 0$ i p - liczba pierwsza), zastosowanie modelowej zupełności do dowodu twierdzenia Hilberta o zerach.
- ★ Ciała definicji, eliminacja elementów urojonych i po co nam to.

Ciała różniczkowo domknięte.

- ♡ Pierścienie różniczkowe, radykalny ideały różniczkowe, twierdzenie Ritt-Raudenbusha, topologia Kolchyna.
- ♡ Ciała różniczkowo domknięte: definicja, rozszerzenia proste, „każde ciało różniczkowe zanurza się w ciało różniczkowo domknięte”, własności teorii DCF_0 .
- ♡ Ranga Morleya, charakteryzacja w ACF, skończenie-wymiarowe zbiory definiowalne w DCF_0 (plus charakteryzacja przez stopień przestępny).
- ★ Internalność do stałych.
- ★ Przykłady zbiorów silnie minimalnych w DCF_0 .

Grupy algebraiczne. Grupy definiowalne w DCF

- ♡ Pojęcie grupy algebraicznej (afinicznych i ogólniej). Krzywe algebraiczne i rozmaitości abelowe. Związek z grupami definiowalnymi w ACF. Pojęcie jądra Manina.
- ♡ Prolongacja rozmaitości różniczkowo-algebraicznej, „redukcja geometrii różniczkowo-algebraicznej do geometrii algebraicznej”.
- ★ Struktura grup algebraicznych nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero (twierdzenie strukturalne Chevalleya: każda spójna grupa algebraiczna jest rozszerzeniem rozmaitości abelowej o grupę liniową). Grupy afiniczne są liniowe.

★ Kącik historyczny i narodziny idei.

1. Początek dojrzałej teorii modeli: twierdzenie Morleya o kategoryczności. Rola zbiorów/struktur silnie minimalnych
2. Przykłady zbiorów silnie minimalnych. Trychotomia Zilbera (idea) i czy/kiedy zachodzi.
3. (Nie było na wykładzie, częściowo było jako zadanie domowe dodatkowe; znajomość tego roztopi mi serce) Pregeometrie, zbiory silnie minimalne są naturalnie pregeometriami, (lokalna) modularność. Nieortogonalność zbiorów silnie minimalnych. Ścisłe sformułowanie trychotomii Zilbera.

Relatywna hipoteza Mordella-Langa.

- ♡ Zarys historyczny (wszystko zaczęło się od twierdzenia Mordella).
- ♡ Dowód relatywnej hipotezy Mordella-Langa (!!!)