1. Pokrycia dowolnymi prostokątami w $\boldsymbol{R}^2$ nie spełniają tezy lematu Vitaliego

Powiemy, że pokrycie zbioru $F \subset \boldsymbol{R}^n$ zbiorami rodziną zbiorów $\mathcal{U}$ spełnia warunek *dowolnie małej średnicy*, jeśli dla każdego $x \in F$ i każdego $\varepsilon > 0$ znajdzie się element $U \in \mathcal{U}$ o średnicy $\operatorname{diam}(U) < \varepsilon$ zawierający x. Lemat Vitaliego mówi, że

1.1. *Pokrycie $\mathcal{U}$ dowolnego zbioru $F \subset \boldsymbol{R}^n$ miary skończonej kostkami spełniającymi warunek dowolnie małej średnicy zawiera przeliczalną rodzinę parami rozłącznych kostek U_k, taką że $|F \setminus \bigcup_k U_k| = 0$.*

Przedstawimy tu konstrukcję[1] pokazującą, że w lemacie Vitaliego dla $\boldsymbol{R}^2$ nie można kwadratów zastąpić dowolnymi prostokątami spełniającymi warunek dowolnie małej średnicy. Zaczniemy od ogólnych lematów dotyczących pokryć zbiorami podobnymi do jednego ustalonego wzorca. Najprostszym takim wzorcem jest kostka jednostkowa, ale może być nim każdy zbiór warunkowo zwarty, którego brzeg ma miarę zero. My ograniczymy się do kostek półotwartych i zbiorów zwartych.

1.2. Definicja. *Podobieństwem* w przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$ nazywamy każde odwzorowanie afiniczne postaci

$$p(x) = \alpha x + b,$$

gdzie $\alpha > 0$, $b \in \boldsymbol{R}^n$. Mówimy, że zbiory A i B zawarte w $\boldsymbol{R}^n$ są podobne, jeśli istnieje podobieństwo $p : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$, takie że $p(A) = B$.

1.3. Lemat. *Dla każdego zbioru otwartego $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ i każdego $\delta > 0$ istnieje przeliczalna rodzina parami rozłącznych kostek półotwartych Q_n o średnicy mniejszej od δ, taka że*

$$\Omega = \bigcup_n Q_n.$$

Dowód. Niech $Q = [0,1)^n$ i niech $\mathcal{Q}$ oznacza zbiór wszystkich kostek *diadycznych*, tzn. kostek postaci

$$Q_m^k = 2^k(Q + m), \qquad k \in \boldsymbol{Z},\ m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \boldsymbol{Z}^n.$$

Dla ustalonego k kostki Q_m^k są parami rozłączne i $\bigcup_m Q_m^k = \boldsymbol{R}^n$. Ponadto dowolne dwie kostki rodziny $\mathcal{Q}$ są albo rozłączne, albo jedna z nich zawiera się w drugiej.

Niech więc $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Dla każdego $x \in \Omega$ istnieje kostka $Q(x) \in \mathcal{Q}$ o średnicy mniejszej niż δ, taka że $x \in Q(x)$. Zatem

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} Q(x).$$

Jeśli teraz usuniemy z pokrycia te kostki, które zawierają się w innych, to otrzymana rodzina będzie spełniać tezę lematu. □

1.4. Lemat. *Niech $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ bedzie zbiorem otwartym, a K zbiorem zwartym o dodatniej mierze. Wówczas dla każdego $\delta > 0$ istnieje rodzina $\{K_n\}$ parami rozłącznych zbiorów podobnych do K o średnicy mniejszej niż δ, taka że*

$$\Omega = \bigcup_n K_n.$$

[1] Przykład pochodzi z książki Miguela de Guzmàna *Differentiation of integrals in* $\boldsymbol{R}^n$. Patrz rozdział IV, Theorem 1.1.

Dowód. Niech A będzie diadyczną kostką półotwartą zawierającą K i niech

$$\Omega = \bigcup A_n,$$

gdzie A_n są podobne do A i parami rozłączne, a ponadto diam$\,(A_N) < \delta$. Oznaczmy przez p_n podobieństwo, takie że $A_n = p_n(A)$ i niech

$$K_n = p_n(K).$$

Niech

$$\lambda = \frac{|K|}{|A|} = \frac{|K_n|}{|A_n|}.$$

Oczywiście $0 < \lambda < 1$. Mamy

$$\left|\Omega \setminus \bigcup_n K_n\right| \leqslant \sum_n \Big(|A_n| - |K_n|\Big) = (1-\lambda)\sum_n |A_n| = (1-\lambda)|\Omega|,$$

więc istnieje N, takie że

$$|\Omega_1| = \left|\Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{N} K_n\right| \leqslant (1-\lambda/2)|\Omega|.$$

Oznaczmy przez $\mathcal{K}_1$ skończoną rodzinę zbiorów $\{K_n\}_{n=1}^{N}$

Indukcyjnie definiujemy zbiory otwarte Ω_k i odpowiadające im skończone rodziny $\mathcal{K}_k$ zbiorów podobnych do K, tak że

$$\Omega_{k+1} = \Omega_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{K}_j$$

oraz

$$|\Omega_k| \leqslant (1-\lambda/2)^k|\Omega|.$$

Łatwo zauważyć, że rodzina $\mathcal{K} = \bigcup_k \mathcal{K}_k$ spełnia tezę lematu. □

Przyjmijmy oznaczenie

$$l(N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

1.5. Lemat. *Dla każdego $N \in \boldsymbol{N}$ istnieje rodzina prostokątów $\{P_k : 1 \leqslant k \leqslant N\} \subset \boldsymbol{R}^2$, taka że*

$$|P_k| = 1, \qquad |\bigcup_{k-1}^{N} P_k| = l(N), \qquad |\bigcap_{k=1}^{N} P_k| = 1/N.$$

Dowód. Tezę spełniają prostokąty

$$P_k = [0,k] \times [0,1/k], \qquad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

□

1.6. Twierdzenie. *Istnieje zbiór mierzalny $F \subset \boldsymbol{R}^2$ miary 1 oraz jego pokrycie prostokątami otwartymi spełniające warunek dowolnie małej średnicy, takie że dla każdej przeliczalnej podrodziny U_n parami rozłącznych elementów tego pokrycia*

$$|\bigcup_n U_n| < 1/2.$$

Dowód. Dla ustalonego $N \in \boldsymbol{N}$ niech P_k^N, $1 \leqslant k \leqslant N$ będą prostokątami domkniętymi spełniającymi warunki Lematu 1.5. Niech

$$S^N = \bigcup_{j=1}^{N} P_j^N.$$

Zastosujmy Lemat 1.4 do zbiorów $\Omega = (0,1)^2$ i $K = S^N$ przy $\delta = 1/N$. Otrzymujemy rodzinę parami rozłącznych zbiorów S_k^N, $k \in \boldsymbol{N}$, podobnych do S^N, o średnicy mniejszej niż $1/N$ i takich że

$$(0,1)^2 = \bigcup_k S_k^N.$$

Jako że każdy S_k^N jest podobny do S^N, przedstawia się jako suma

$$S_k^N = \bigcup_{j=1}^{N} P_{k,j}^N,$$

gdzie prostokąt $P_{k,j}^N$ jest podobny do P_j^N. Zatem

$$\frac{|P_{k,j}^N|}{|S_k^N|} = \frac{|P_j^N|}{|S^N|} = \frac{1}{l(N)}.$$

Połóżmy

$$\mathcal{A}_N = \{U_{k,j}^N\}_{1 \leqslant j \leqslant N,\ k \in \boldsymbol{N}}, \qquad U_{k,j}^N = \operatorname{int}(P_{k,j}^N),$$

Niech $F_N = \bigcup \mathcal{A}_N$. Oczywiście $|F_N| = 1$. Rodzina $\mathcal{A}_N$ stanowi pokrycie F_N prostokątami otwartymi, ale nie spełnia warunku dowolnie małej średnicy. Będziemy więc jeszcze uzupełniać to pokrycie, przy okazji modyfikując zbiór, który pokrywamy. Na razie zwróćmy uwagę na jedną bardzo ważną własność tej rodziny. Otóż, jeśli U_s są parami rozłącznymi elementami tej rodziny, to każdy z nich jest podzbiorem pewnego zbioru $S_{k_s}^N$ i żadne dwa nie mogą być podzbiorami tego samego zbioru $S_{k_s}^N$, bo zgodnie z konstrukcją Lematu 1.5 zbiory miałyby wtedy niepusty przekrój. Zatem

$$|\bigcup_s U_s| = \sum_s |U_s| \leqslant \sum_s \frac{|S_{k_s}^N|}{l(N)} \leqslant \frac{1}{l(N)},$$

bo $\sum_k |S_k^N| = 1$.

Przystępujemy do ostatniego kroku konstrukcji. Wybierzmy ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych N_m, którego dalsze własności zadekretujemy za chwilę. Niech

$$\mathcal{A} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}_{N_m}.$$

Ponieważ każda z rodzin $\mathcal{A}_{N_m}$ stanowi pokrycie F_{N_m} otwartymi prostokątami o średnicy mniejszej niż $1/N_m$, rodzina $\mathcal{A}$ jest pokryciem zbioru $F = \bigcap_m F_{N_m}$ i ma własność dowolnie małej średnicy. Ponadto $|F| = 1$.

Przypuśćmy, że U_s jest ciągiem parami rozłącznych elementów pokrycia $\mathcal{A}$. Wtedy

$$|\bigcup_s U_s| = \sum_s |U_s| = \sum_m \sum_{U_s \in \mathcal{A}_{N_m}} |U_s| \leqslant \sum_m \frac{1}{l(N_m)}.$$

Z oszacowania

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{l(N)} \geqslant 1 + \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{\log N - 1/2}$$

widać, że interesujący nas szereg jest rozbieżny, ale na szczęście ciąg $l(N)$ jest rozbieżny do nieskończoności, więc dobierając odpowiednio ciąg $\{N_m\}_m$, uzyskujemy

$$|\bigcup_s U_s| < 1/2,$$

co kończy dowód. $\square$